

# Trabajo de Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

### Métodos Numéricos Sencillos para el Cálculo de Chorros y Penachos Térmicos Laminares

Autor: Gabino Daniel Díaz Reina

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016



---

Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Métodos Numéricos Sencillos para el Cálculo de Chorros y Penachos Térmicos Laminares**

Autor:  
Gabino Daniel Díaz Reina

Tutor:  
Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor  
Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2016

---

Trabajo de Fin de Grado: Métodos Numéricos Sencillos para el Cálculo de Chorros y Penachos Térmicos  
Laminares

Autor: Gabino Daniel Díaz Reina

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

---

*A mi familia*

*A mis maestros*

---



# Resumen

---

Los métodos numéricos para el cálculo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como son las de Navier-Stokes se han convertido en una herramienta indispensable en el mundo de la ingeniería tanto para profesores como para alumnos. En este trabajo se aplican métodos numéricos sencillos para el cálculo de chorros incompresibles y penachos térmicos. Gracias a este tipo de flujo se consigue inyectar cantidad de movimiento en el campo fluido, lo cual puede llegar a ser una aplicación interesante en muchos procesos de la ingeniería. Entre ellas se encuentra el control de la capa límite mediante soplado en perfiles aerodinámicos, motivación de este trabajo y vital método a la hora de evitar la entrada en pérdida. Dispositivos hipersustentadores, como los flaps ranurados, que controlan la capa límite mediante soplado en despegue y aterrizaje ayudan a adquirir elevados ángulos de ataque con el consiguiente aumento de la sustentación necesaria en estas fases de vuelo.

Para resolver las ecuaciones que gobiernan la física de los chorros y los penachos se ha implementado un código numérico en el programa MATLAB que modela las ecuaciones de capa límite y permite representar los resultados. Estos resultados se van a comparar finalmente con soluciones de semejanza teóricas dadas en la literatura por algunos autores.

---

# Abstract

---

Numerical techniques for the calculation of partial difference equations like the Navier-Stokes's have become an essential tool in the world of engineering for both teachers and students. This work applies simple numerical techniques for the calculation of incompressible jets and thermal plumes. Thanks to this kind of flow it is possible to inject momentum in the flow field, which could be an interesting application in many processes in engineering. Among them it is found the blowing boundary layer control: motivation of this work and a very important method to avoid aerodynamic stall. High lift devices, like slotted flaps, help to achieve high angles of attack on take-off and landing by blowing boundary layer control to get to the required lift at these flight phase.

To solve the equations governing the jets and thermal plumes behaviour, it has been implemented a numerical code on the software MATLAB to model the boundary layer equations and to present numerical results. Finally, these results are going to be compared with theoretical similarity solutions given on the literature by several authors.

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Índice</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Objetivos y motivación del trabajo</i>	1
1.2. <i>Métodos numéricos para la resolución del problema</i>	5
1.3. <i>Estructura del trabajo</i>	6
<b>2 Chorros y penachos laminares</b>	<b>9</b>
2.1. <i>Ecuaciones de chorros incompresibles</i>	9
2.1.1 Chorro bidimensional	10
2.1.2 Chorro axilsimétrico	13
2.2. <i>Ecuaciones de penachos térmicos</i>	15
2.2.1 Penacho térmico bidimensional	16
2.2.2 Penacho térmico axilsimétrico	20
2.3. <i>Método numérico de las diferencias finitas</i>	23
2.3.1 Mallado del campo fluido	23
2.3.2 Discretización en diferencias finitas	24
2.3.3 Tipos de representaciones: explícitas e implícitas	26
2.3.4 Modelos en diferencias finitas de los problemas estudiados	27
2.4. <i>Resultados de chorros incompresibles</i>	36
2.4.1 Efecto de $U_s$	37
2.4.2 Comparación teórico-numérica	41
2.5. <i>Resultados de penachos térmicos</i>	43
2.3.1 Efecto de $Q$	45
2.3.2 Efecto de $U_\infty$	49
2.3.3 Comparación teórico-numérica	51
<b>4 Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>55</b>
<b>Referencias</b>	<b>57</b>

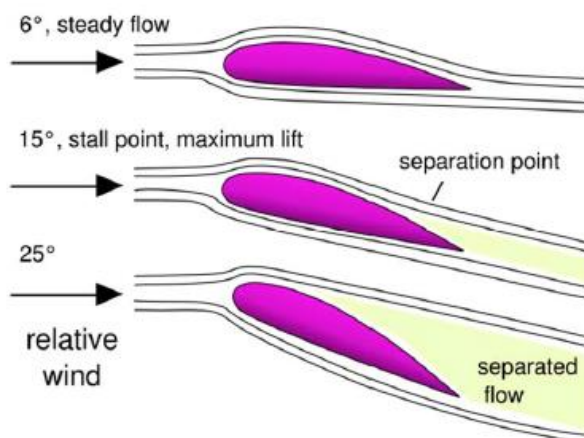
---

# 1 INTRODUCCIÓN

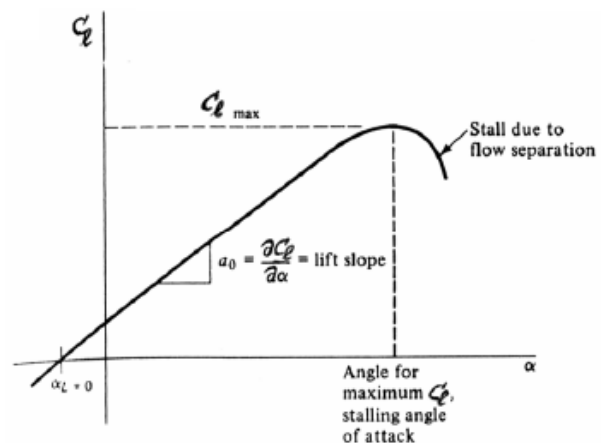
En este capítulo se expondrán los motivos principales que han llevado a la realización de este trabajo, así como una breve contextualización del problema en el campo de estudio. Además, se tratará de exponer los objetivos del trabajo como referencia en el desarrollo del mismo. Se va a realizar una breve introducción al problema entre manos de modo que se justifique el trabajo realizado y, por último, se va a resumir la estructura del mismo en aras de una mejor comprensión de su desarrollo.

## 1.1. Objetivos y motivación del trabajo

Las fuerzas que dominan la aerodinámica de un cuerpo sometido a la acción de un campo fluido con velocidad  $U_\infty$  son cuatro, de las cuales dos de ellas son de vital importancia en el campo de la aeronáutica. Estas fuerzas son la sustentación y la resistencia. En la búsqueda del aumento de la eficiencia de las aeronaves se hace necesario conseguir la máxima sustentación posible a la vez que se intenta reducir la resistencia aerodinámica. Dado un perfil aerodinámico en un campo fluido, la forma de aumentar la sustentación que proporciona es aumentar el ángulo de ataque. Como puede observarse en la curva de sustentación de un perfil típico, la sustentación aumenta linealmente con el ángulo de ataque hasta llegar al ángulo de desprendimiento, a partir del cual la sustentación cae bruscamente a la vez que la resistencia aumenta en gran medida. Esto es debido al desprendimiento de la corriente en el extradós del perfil.



a)



b)

Figura 1-1. Perfil aerodinámico típico aumentando ángulo de ataque. a) Comportamiento del flujo alrededor del perfil aumentando el AoA. b) Curva de coeficiente de sustentación frente a AoA.

La corriente se desprende debido a la existencia de un acusado gradiente adverso de presiones, el cual provoca que en las inmediaciones de la capa límite la corriente invierta el sentido de su movimiento formando torbellinos aguas abajo a partir del punto de separación. El mecanismo que ayuda a evitar la separación del fluido consiste en la aportación de cantidad de movimiento en la capa límite para contrarrestar el efecto del gradiente adverso de presiones. Esto ocurre de forma espontánea en los perfiles cuando se produce la transición de régimen laminar a turbulento. Las causas que precipitan la transición son el aumento del número de Reynolds, la no uniformidad de la corriente incidente y la rugosidad de la superficie. Además, la influencia del gradiente de presiones se pone de manifiesto porque gradientes positivos precipitan la transición mientras que gradientes negativos la retrasan. El régimen turbulento se caracteriza por el movimiento caótico de las partículas en el que éstas se mueven desordenadamente y sus trayectorias se encuentran formando pequeños remolinos aperiódicos. En este movimiento caótico, la velocidad se puede descomponer en un valor medio más una perturbación. La turbulencia permite un intercambio de cantidad de movimiento mucho más eficaz debido a la existencia de fluctuaciones continuas de la velocidad. Cerca de la pared, a una determinada distancia, se tiene una velocidad media mayor que la que habría si la capa límite fuese laminar y, en consecuencia, la cantidad de movimiento de los elementos fluidos próximos a la pared es mayor que en el caso laminar. Por ello, la capa límite turbulenta soporta mejor los gradientes adversos de presión consiguiéndose así retrasar el desprendimiento.

La capa límite turbulenta tiene la desventaja de generar una mayor resistencia de fricción que la capa límite laminar debido a que el gradiente de velocidades en la pared es mayor. Por ello, desde los años 40 se empezó a buscar la geometría que proporcionara régimen laminar en la mayor parte del perfil. Estos llamados perfiles laminares son muy complicados de implementar en la práctica debido a la dificultad de mantener la uniformidad de la corriente y evitar la rugosidad en la superficie. Irregularidades inapreciables en la superficie, por ejemplo, partículas de polvo o insectos adheridos producen una apreciable estela turbulenta. Además, en los perfiles clásicos NACA el mantenimiento del régimen laminar no es posible debido a la existencia de un mínimo en la distribución de presiones en las proximidades del borde de ataque. A partir de él las presiones son crecientes por lo que se favorece la transición. Puesto que los gradientes de presión negativos ejercen efecto estabilizador en la capa límite laminar, el procedimiento para obtener perfiles laminares consistirá en proyectar perfiles con presiones decrecientes sobre una gran parte de la cuerda, por ejemplo, hasta el 50%. Así se obtuvieron efectivamente los perfiles laminares NACA de las series 2 a 7.

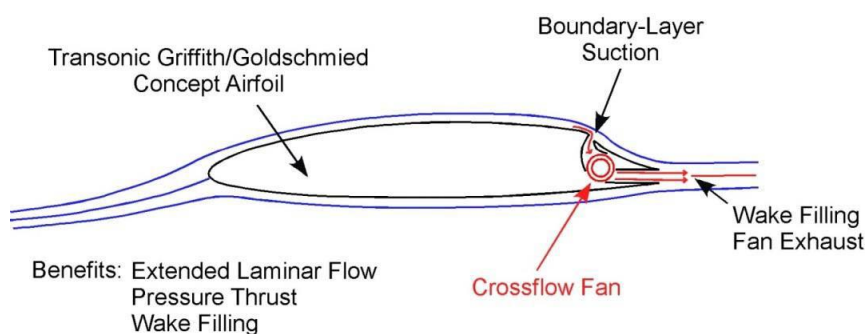


Figura 1-2. Propulsive airfoil de Phillip Ansell.

Si se quiere evitar el régimen turbulento para no penalizar la resistencia de fricción, se hace necesario buscar otro mecanismo que asegure la aportación extra de cantidad de movimiento para retrasar el desprendimiento de la capa límite. La idea fundamental se debe a Griffith, y es la siguiente: si la recuperación de presiones se localiza en un punto y en él se aplica una ranura de succión o soplado de la capa límite, se elimina el inconveniente de los gradientes positivos de presión y, por consiguiente, el peligro de desprendimiento turbulento. Esta idea ha sido utilizada recientemente para implementar diferentes dispositivos de control de la capa límite como son el “Propulsive Airfoil” (Phillip Ansell, Universidad de Illinois 2015) (Figura 1-2) o el “Co-Flow Jet airfoil” (Dr. GreCheng Zha, Universidad de Miami, 2011) (Figura 1-3). También se pueden encontrar patentes de soplado de capa límite en el extrados con succión en el borde de ataque.



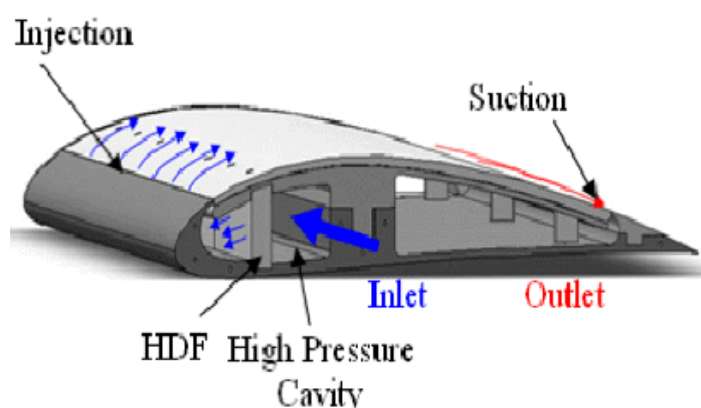


Figura 1-3. Esquema de funcionamiento del perfil CFJ airfoil del Dr. GreCheng Zha

El perfil de succión que más éxito ha tenido de estos últimos es el del Dr. GreCheng Zha, el cual se ha demostrado que mantiene adherida la corriente en el extrados hasta ángulos de ataque cercanos a los 40° (Figura 1-3. a). Este perfil permite obtener coeficientes de sustentación muy altos (Figura 1-3. b) por lo que no haría falta utilizar dispositivos hipersustentadores en despegue o aterrizaje, además de acortar las carreras de ambos tramos de vuelo (US Patent 8,485,476 B2).

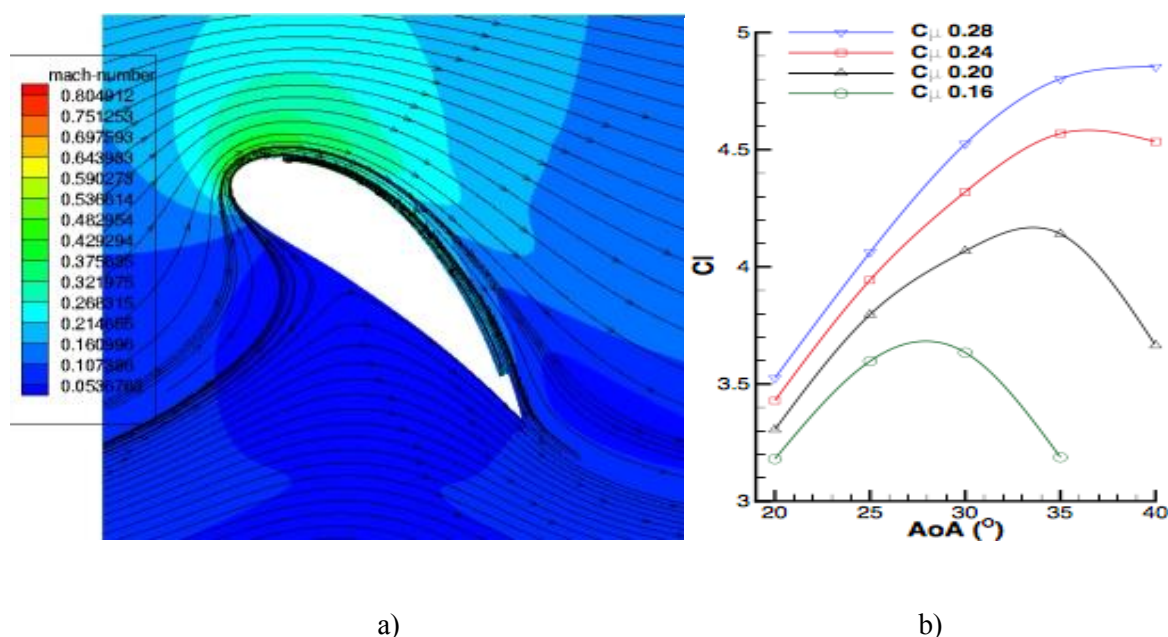


Figura 1-1. CFJ airfoil trabajando a alto AoA. a) Análisis CFD del perfil. Campo de velocidades. b) Gráfica de  $C_l$  frente a  $AoA$  (°) para varios "coeficiente de momento de chorro"  $C_\mu^1$ .

Los perfiles de soplado y succión pueden tener también otras aplicaciones. Por ejemplo, en perfiles delgados, una ranura en la proximidad del borde de ataque permitiría obtener grandes coeficientes de sustentación máxima al eliminar el peligro del pico de depresión, sustituyéndolo por una discontinuidad de la velocidad. También pueden emplearse ranuras en los flaps para aumentar su efectividad. Este mecanismo se suele utiliza

<sup>1</sup> El coeficiente de momento de chorro  $C_\mu$  se usa para cuantificar la intensidad del chorro de forma adimensional.

en la aviación comercial en las fases de despegue y aterrizaje, en las cuales se despliegan los llamados dispositivos hipersustentadores (Figura 1-4). Estos dispositivos aumentan la cuerda y la curvatura de los perfiles y, muchos de ellos, incluyen este tipo de ranuras que soplan la capa límite permitiendo llegar a mayores ángulos de ataque y de deflexión de los dispositivos retrasando el punto de desprendimiento de la corriente y previniendo en consecuencia la entrada en pérdida de los perfiles.



Figura 1-4. Ala de avión comercial con flap ranurado desplegado.

Se emplean también para evitar el desprendimiento en las puntas de las alas en flecha, idea aplicada con éxito por la casa Armstrong Whitworth. Existen problemas todavía en estudio y sin resolver. Hay que conocer la forma, tamaño, orientación, número y posición más conveniente de las ranuras, cantidad de aire a eliminar y forma de extraerlo, etc.

De esta forma se justifica la resolución del problema de la inyección de cantidad de movimiento mediante chorro, también conocido como “jet” (Figura 1-5). Se trata de un problema de difícil resolución analítica debido a que hay que resolver las ecuaciones de Navier-Stokes de cantidad de movimiento y continuidad en todos los puntos del chorro y en las proximidades de éste. Gracias a las modernas herramientas numéricas existentes somos capaces de discretizar estas ecuaciones y resolverlas estación a estación tal y como se propone en este trabajo. En relación con el problema del chorro (convección forzada) se puede encontrar el problema del penacho (convección libre), problema cuyos perfiles de velocidad típicos son muy parecidos al del chorro aunque la fuerza motriz la ejerza, en este caso, la flotabilidad.

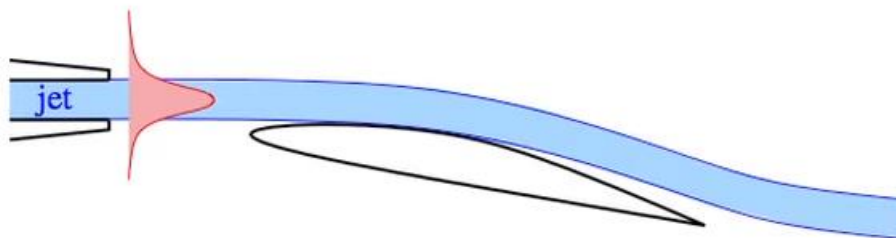


Figura 1-5. Jet sobre el extradós de un perfil.

## 1.2. Métodos numéricos para la resolución del problema

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones vectoriales en derivadas parciales. Se trata de la ecuación de cantidad de movimiento y la ecuación de continuidad, que junto a la ecuación de la energía forman un sistema de ecuaciones irresolubles analíticamente hasta la fecha que constituyen el cuerpo de la mecánica de fluidos (1-1). A través de ellas se puede estudiar el comportamiento de muchos sistemas del campo de la Termo-Fluidomecánica como el movimiento de gases en conductos, el campo fluido potencial alrededor de un cuerpo, la capa límite viscosa o térmica en las proximidades de una pared o los chorros y penachos térmicos. Dichas ecuaciones han sido tratadas tradicionalmente haciendo uso de diferentes hipótesis simplificativas, por ejemplo la ausencia de viscosidad fuera de la capa límite, que permiten reproducir el comportamiento real de algunos sistemas de forma aproximada. Estas simplificaciones dan lugar a modelos matemáticamente simplificados resolubles analíticamente, pero que resultan o bien triviales (con resultados muy cercanos a los experimentales) o bien demasiado alejados de la realidad física.

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\nabla P + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla e &= \nabla \cdot (K \nabla T) - p \nabla \cdot \vec{V} + \vec{\tau} : \nabla \vec{V} + Q\end{aligned}\quad (1-1)$$

Para manejarse con las ecuaciones de Navier-Stokes en problemas más complejos, además de utilizar las citadas simplificaciones, es necesario hacer uso de herramientas matemáticas más sofisticadas. Tradicionalmente estos problemas con dos o más variables han sido tratados utilizando las soluciones de semejanza. Esta técnica nos permite tratar un problema de dos variables sustituyéndolas por una única variable. Son difíciles de obtener y se obtienen resultados aproximados que difieren del comportamiento real en las proximidades el punto inicial de los sistemas. La otra forma de manejar las ecuaciones (1-1) es discretizándolas mediante técnicas matemáticas e implementarlas numéricamente, lo cual se detallará en los siguientes capítulos. Hace años, cuando no existían computadoras capaces de realizar muchos cálculos de forma secuencial, las soluciones de semejanza eran la mejor opción para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, pero gracias a la aparición de modernas herramientas de cálculo numérico somos capaces de resolver miles de ecuaciones secuencialmente en pocos segundos mediante los procesadores de última generación. Se trata de uno de los mayores logros de la ingeniería del siglo XX ya que, gracias a ello, profesores y alumnos son capaces de resolver problemas mucho más cercanos a la realidad física que se quiere conocer.

Este proyecto ha sido realizado con la ayuda de la herramienta de cálculo numérico MATLAB, la cual permite programar complejos sistemas de ecuaciones mediante un sencillo lenguaje de programación que se enseña en las escuelas de ingeniería en los primeros cursos y que resulta de vital importancia a la hora de manejar este tipo de sistemas. Se trata de una herramienta capaz de proyectar de forma directa la relación entre cada término matemático de las ecuaciones con los resultados finalmente obtenidos y su interpretación física, dejando de lado la necesidad de llegar a resultados analíticos a través de engorrosas deducciones matemáticas y haciendo mucho más intuitiva la resolución de los problemas de la ingeniería. La otra forma de resolver este tipo de problemas complejos es a través de programas CFD como ANSYS FLUENT, los cuales tienen implementadas en su código las ecuaciones de Navier-Stokes. Para resolver problemas de la ingeniería con estos programas sólo hay que introducir las condiciones de contorno del problema (normalmente a través de modelos CAD) y algunos parámetros iniciales como la velocidad en el infinito o la viscosidad del fluido, además de decidir en qué zona del campo fluido se quiere obtener una mayor exactitud (lo que se conoce como mallar el problema), para obtener una solución aproximada. Se trata de una interacción de tipo “caja negra” entre el usuario y el ordenador, a través de la cual no se tiene contacto con la anteriormente citada relación entre los aspectos matemáticos y físicos del problema. En este trabajo se ha querido evitar utilizar este tipo de herramientas con el objetivo de demostrar que se pueden obtener soluciones válidas con modelos numéricos sencillos y capaces de implementar por los alumnos, además de mantener la esencia matemática de la Mecánica de Fluidos.

Una vez discutida la necesidad de usar métodos numéricos para resolver este tipo de problemas de la ingeniería, se plantea el objetivo de este trabajo en el cual se intenta demostrar la idoneidad de la utilización de métodos numéricos sencillos para la inyección de flujo. Para ello, se van a manejar las llamadas “Numerical Marching Techniques”, tomando como referencia la obra de Robert W. Hornbeck “Numérica Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer”. Se trata de una técnica de cálculo numérico basada en la solución en diferencias finitas de las derivadas parciales de las ecuaciones de Navier-Stokes a través de la cual la solución se obtiene integrando estación a estación las ecuaciones moviéndose siempre aguas abajo en el campo fluido, hacia delante en el tiempo, etc; aunque en este trabajo solo se va a considerar el caso estacionario. El uso de estas técnicas se restringe al caso de ecuaciones parabólicas e hiperbólicas (como es el caso de las ecuaciones de ondas o la difusión) no siendo posible aplicarlas a las ecuaciones elípticas (ecuación de Laplace). Una restricción adicional que existe en el uso de estas técnicas es que el flujo de retorno no está permitido en el campo fluido, por tanto, la validez física de soluciones dadas en estos puntos debe ser cuestionada. Este tipo de comportamiento se asocia a flujos desprendidos y, por tanto, la solución no debe ser tomada más allá del punto de separación. Una discusión más detallada sobre esta técnica será expuesta en los siguientes capítulos.

### 1.3. Estructura del trabajo

Este trabajo se encuadra dentro de una serie de trabajos de fin de grado en los cuales sólo había movimientos de fluidos en conductos cerrados. Ahora se va a estudiar el fluido libre de forma que no hay ningún cuerpo que interfiera en el movimiento: chorros y penachos térmicos. Se presenta, a grandes rasgos, dividido en dos bloques además de la presente introducción que justifica el abordaje del problema. Estos dos bloques son la formulación del problema y la resolución del mismo con la discusión de los resultados. Finalmente va a exponerse un capítulo presentando las conclusiones del trabajo y las líneas futuras del mismo.

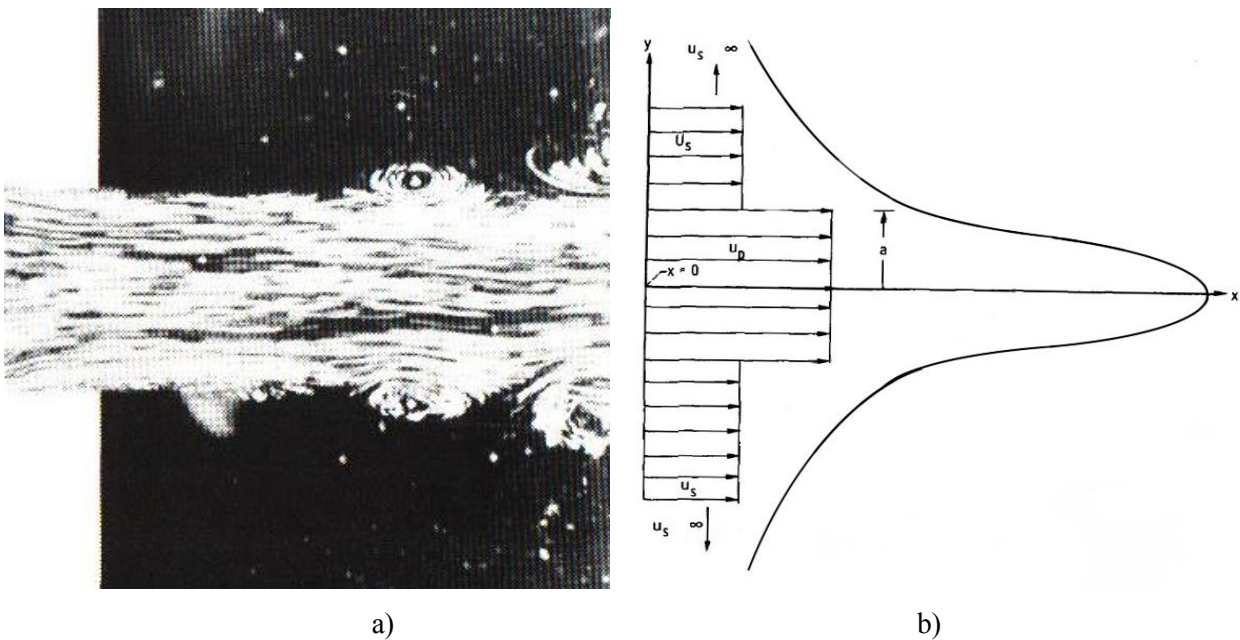


Figura 1-6. Chorros laminares incompresibles. a) Foto de chorro real. b) Esquema del problema bidimensional



Una vez formulado el problema, se va a abordar su resolución a través del método numérico mencionado anteriormente justificando la formulación escogida. Va a describirse la forma en que se han implementado numéricamente los programas en MATLAB de modo que la resolución conlleve el menor coste computacional posible y va a realizarse una discusión de los resultados obtenidos comparándose estos con resultados teóricos. Finalmente, en el último capítulo va a realizarse una valoración general del trabajo realizado a modo de conclusión de forma que se sinteticen las ideas expuestas resumiendo los resultados obtenidos en relación a la formulación adoptada. Por último, va a hacerse una reflexión acerca de las futuras líneas de trabajo e investigación en el campo de los métodos numéricos dentro de la Mecánica de Fluidos y, concretamente, de la Aerodinámica.

## 2 CHORROS Y PENACHOS LAMINARES

En este capítulo se van a describir en profundidad los problemas a resolver. De forma general, se van a realizar las hipótesis simplificadoras pertinentes en las ecuaciones generales de cantidad de movimiento, continuidad y energía y se van a justificar los cambios de variable escogidos para adimensionalizar las ecuaciones. En la mayoría de los problemas que se van a resolver se supone que el fluido se encuentra en régimen laminar, situación que solo se produce en algunos casos cerca del punto inicial del chorro. En la naturaleza, los chorros se encuentran casi siempre en régimen turbulento, el cual se estudiará teórica y numéricamente en otro capítulo de forma que sea posible resolver consistentemente y de forma realista los problemas previamente resueltos en régimen laminar.

Partiendo de las ecuaciones (1-1), se asume que el fluido se encuentra en régimen incompresible ( $M_\infty^2 < 0.1$ ), estacionario ( $Str \ll 1$ ) y con fuerzas másicas despreciables ( $Fr \gg 1$ ). De este modo se tiene:

$$\begin{aligned}\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho C_v \vec{V} \cdot \nabla T &= K \nabla^2 T\end{aligned}\tag{2-1}$$

### 2.1 Ecuaciones de chorros incompresibles

El primer problema que va a estudiarse es el chorro con condición de contorno en velocidad. Este problema se describe mediante un campo fluido uniforme de velocidad  $u_s = U_\infty$ , en el cual se introduce una discontinuidad  $u_p$  en la velocidad en un punto inicial ( $x = 0$ ) en una región  $-a \leq y \leq a$  de forma que la velocidad fuera de esta región sea  $u_s = \lambda u_p$ , con  $0 < \lambda < 1$  (ver Figura 1.6. a). Es importante notar que los signos “<” significan “estrictamente”, ya que con  $\lambda = 0$  o muy pequeño se podrían producir problemas de consistencia (lo cual se comentará posteriormente) y con  $\lambda = 1$  no habría discontinuidad en la velocidad y, por tanto, no habría problema a resolver. Se trata de un problema de convección forzada (forzada por un flujo exterior que es impuesto y producido por cualquier medio mecánico), ya que las fuerzas de inercia convectiva son más importantes que las fuerzas de flotabilidad, lo cual ocurre cuando la velocidad de la corriente es alta y la diferencia de temperaturas en el problema es baja. Esto se traduce en que la relación  $Gr \ll Re^2$ , siendo  $Gr$  en número de Grashof y  $Re$  el número de Reynolds. Puesto que no se va a resolver el campo de temperaturas en los chorros incompresibles, no se va a profundizar en esta discusión.

Además, se va a considerar  $\nabla p = 0$ , ya que en todas las variantes del problema a estudiar se tiene que la presión constante del fluido ambiente impone su presión al campo fluido completo. Por esta constancia de la presión, el ímpetu total en la dirección principal del fluido se va a mantener constante. Esto va a dar lugar a un análisis teórico del problema partiendo de [2], una vez resuelto el problema numéricamente. Para poder asumir la presión constante se deben cumplir dos condiciones según [1]: la tensión superficial del chorro debe ser despreciable y éste debe estar totalmente expandido, esto quiere decir que la presión en la boca del chorro es igual a la presión en el fluido circundante (por ejemplo, un chorro saliendo de un tubo). En el caso contrario (por ejemplo, un chorro saliendo directamente de un depósito) la presión en el interior del chorro no alcanza la presión del resto del dominio hasta haber alcanzado la “vena contracta” (Figura 2-1), caso que no se va a considerar en este trabajo.



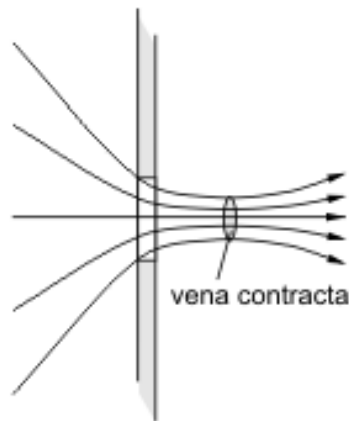


Figura 2-1. Descripción gráfica del punto de “vena contracta”.

En este problema solamente es necesario resolver la ecuación de cantidad de movimiento simultáneamente con la ecuación de continuidad ya que, al hacer la asunción de fluido en régimen incompresible, la ecuación de la energía se encuentra desacoplada de las otras dos ecuaciones. Por lo tanto, en este caso se puede resolver el problema mecánico de forma separada del problema térmico, lo cual disminuye considerablemente el coste computacional cuando se resuelven las ecuaciones numéricamente.

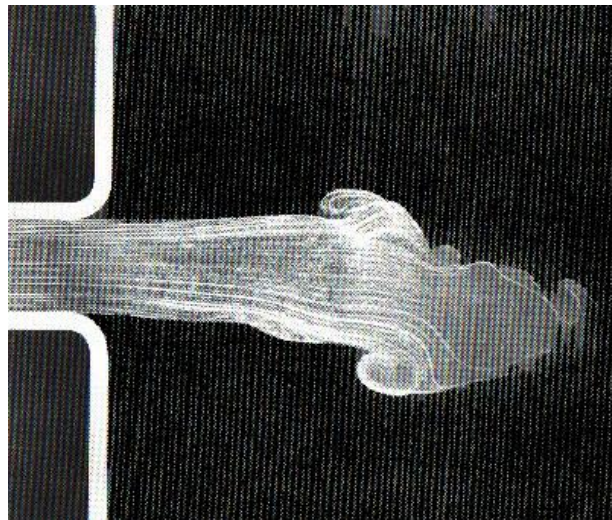


Figura 2-2. Imagen de chorro típico saliendo de un conducto

De forma general, este problema va a plantearse con dos variantes geométricas. Se van a estudiar los casos del chorro plano (bidimensional) y el chorro axilimétrico (tridimensional), los cuales tienen una formulación muy similar tanto en las condiciones de contorno como en los cambios de variable adimensionales. Las únicas diferencias se encuentran en los sistemas de ejes en los que se desarrollan las ecuaciones generales y en los valores numéricos de la solución final de las variables del problema.

### 2.1.1 Chorro bidimensional

Una vez descrito el problema del chorro de forma general, se va a plantear el problema plano. En este caso, se utiliza el sistema cartesiano para desarrollar las ecuaciones generales. De esta forma, si se proyecta la ecuación



de cantidad de movimiento en cada dirección del espacio, junto con la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

Utilizando variables físicas en todo momento. Tomando órdenes de magnitud en el término viscoso, se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta u}{(\Delta x)^2} \sim \frac{u_c}{L^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta v}{(\Delta x)^2} \sim \frac{v_c}{L^2} \quad (2-3)$$

donde se ha supuesto que  $u$  y  $v$  varían del orden de ellas mismas en distancias de orden  $L$  a lo largo del eje  $x$ , mientras que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\Delta u}{(\Delta y)^2} \sim \frac{u_c}{a^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\Delta v}{(\Delta y)^2} \sim \frac{v_c}{a^2} \quad (2-4)$$

Puesto que el flujo es esbelto,  $a/L \ll 1$ , se puede decir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2-5)$$

Respecto del gradiente de presiones, se puede demostrar que  $\nabla p = 0$ . En efecto, si tomamos órdenes de magnitud en las variaciones transversales y longitudinales de presión

$$\Delta_y p \sim \rho v_c^2 \quad ; \quad \Delta_x p \sim \rho u_c^2 \quad (2-6)$$

e introducimos la ecuación de continuidad

$$v_c/u_c \sim a/L \quad (2-7)$$

se puede decir que el movimiento del fluido en el chorro es casi-unidireccional y que

$$\frac{\Delta_y p}{\Delta_x p} \sim \left( \frac{v_c}{u_c} \right)^2 \sim \left( \frac{a}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (2-8)$$

esto es que las variaciones de presión según  $y$  son nulas salvo errores del orden de  $\left( \frac{a}{L} \right)^2 \sim 10^{-3}$ .

Si la presión no varía con la distancia  $y$  al eje del chorro, su valor debe venir dado por el valor de la presión exterior  $p_e(x)$ . Entonces, este valor de la presión se corresponde con el calculado mediante la teoría ideal. Si denominamos  $u_e(x)$  a la velocidad fuera del chorro, la ecuación de Bernoulli para el flujo ideal proporciona

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial p_e}{\partial x} = -u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (2-9)$$

como  $u_e = U_\infty = cte$ , entonces podemos decir que

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0 \quad (2-10)$$

demostrando matemáticamente el razonamiento anterior mediante el cual  $\nabla p = 0$ .

Por tanto, las ecuaciones que dominan el movimiento del chorro son:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

Por último, se demuestra que los chorros son laminares ya que el número de Reynolds,  $Re = \frac{u_c L \rho}{\mu} = \frac{u_c^2 a^2}{\nu^2} \sim 10^2$ , es lo suficientemente pequeño.

### 2.1.1.1 Condiciones de contorno

Las condiciones de contornos son los parámetros que determinan el problema que se va a resolver. En este caso, se tiene:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u_p(y) & y \leq a \\ u(0, y) &= u_s(y) & y > a \\ u(x, \infty) &= u_s(\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0 \\ v(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

En donde  $u_p(y)$  y  $u_s(y)$  se van a definir como se ha comentado anteriormente  $\frac{u_s}{u_p} = \lambda$ .

Hay comentar que es necesario definir igualmente la velocidad transversal en  $x = 0$  para completar la formulación del problema de la siguiente manera:

$$v(0, y) = 0 \quad (2-13)$$

Esta última condición no se considera una condición de contorno ya que el problema se cierra matemáticamente sin ella, sin embargo, es necesario especificarla debido al esquema de diferencias finitas que se va a utilizar para resolver el problema. De hecho, se comprueba que grandes cambios en el valor  $v(0, y) = 0$  utilizado no influye en la resultado final, ya que los efectos se amortiguan tras unos pocos pasos desde el inicio  $x = 0$ .

### 2.1.1.2 Adimensionalización

Para escoger los cambio de variables adecuados para adimensionalizar las ecuaciones, se toman ordenes de magnitud en el término convectivo y se tiene en cuenta la ecuación (2-4) para el término viscoso.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_c^2}{L} \quad ; \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{v_c u_c}{a} \quad (2-14)$$

Donde  $L$  es la longitud característica en  $x$ ,  $u_c$  es la velocidad característica en  $x$  y  $v_c$  es la velocidad

característica en  $y$ . Igualando términos:

$$\frac{u_c^2}{L_x} = \nu \frac{u_c}{a^2} \quad ; \quad \frac{v_c u_c}{a} = \nu \frac{u_c}{a^2} \quad (2-15)$$

Obteniendo:

$$L = \frac{u_c a^2}{\nu} \quad ; \quad v_c = \frac{\nu}{a} \quad (2-16)$$

Realizando los cambios de variable pertinentes, se tiene:

$$\begin{aligned} u &= U u_c \\ v &= V v_c = \frac{V \nu}{a} \\ x &= X L = \frac{X u_c a^2}{\nu} \\ y &= Y a \end{aligned} \quad (2-17)$$

Las letras mayúsculas hacen referencia a las variables adimensionales. Sustituyendo en (2-11), las ecuaciones en forma adimensional quedan:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \end{aligned} \quad (2-18)$$

Y sustituyendo en (2-12) las ecuaciones de contorno adimensionales son:

$$\begin{aligned} U(0, Y) &= U_p(Y) \quad Y \leq 1 \\ U(0, Y) &= U_s(Y) \quad Y > 1 \\ U(X, \infty) &= U_s(\infty) \\ \frac{\partial U}{\partial Y}(X, 0) &= 0 \\ V(X, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-19)$$

### 2.1.2 Chorro axilsimétrico

Como se ha descrito anteriormente, el modelo tridimensional sólo se diferencia del modelo bidimensional en el sistema de coordenadas elegido para plantear las ecuaciones (2-1) y en los resultados numéricos que se obtienen finalmente. En este caso, se va a plantear un sistema de coordenadas cilíndricas con simetría axial. De esta forma, se anulan todas las derivadas con respecto a la coordenada angular. El esquema del problema proyectado en un plano  $\phi = cte$  se observa en la Figura 2-2, análoga a la Figura 1-6.a.

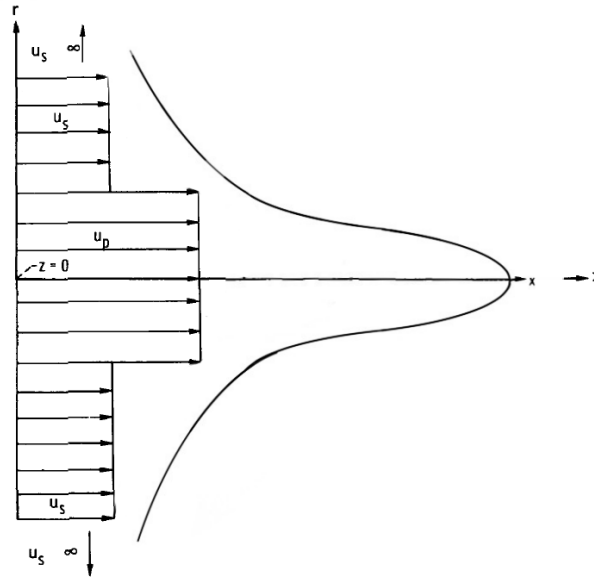


Figura 2-3. Esquema del problema axilsimétrico.

Como puede observarse, las variables  $x$  e  $y$  se sustituyen por  $z$  y  $r$ , las cuales van a servir para proyectar las ecuaciones (2-1) en el sistema cilíndrico. Tras realizar las aproximaciones mencionadas en el apartado anterior, las ecuaciones, proyectando en  $z$ , quedarían por tanto:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (2-20)$$

Al igual que en las ecuaciones (2-11), se utilizan variables físicas en todo momento.

### 2.1.2.1 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno del problema axilsimétrico son, por tanto:

$$\begin{aligned} u(0, r) &= u_p(r) & r &\leq a \\ u(0, r) &= u_s(r) & r &> a \\ u(z, \infty) &= u_s(\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial r}(z, 0) &= 0 \\ v(z, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

Y la ecuación (2-13) pasa a ser:

$$v(0, r) = 0 \quad (2-22)$$

### 2.1.2.2 Adimensionalización

Análogamente a los resultados de las ecuaciones (2-16) y (2-17) se obtiene:

$$L = \frac{u_c a^2}{\nu} \quad ; \quad v_c = \frac{\nu}{a} \quad (2-23)$$

$$\begin{aligned}
u &= Uu_c \\
v &= Vv_c = \frac{Vv}{a} \\
z &= ZL = \frac{Zu_c a^2}{v} \\
r &= Ra
\end{aligned} \tag{2-24}$$

Por último, sustituyendo en (2-20) y (2-21) se tiene:

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial U}{\partial Z} + V \frac{\partial U}{\partial R} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \\
\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial (RV)}{\partial R} &= 0
\end{aligned} \tag{2-25}$$

$$\begin{aligned}
U(0, R) &= U_p(R) \quad R \leq 1 \\
U(0, R) &= U_s(R) \quad R > 1 \\
U(Z, \infty) &= U_s(\infty) \\
\frac{\partial U}{\partial R}(Z, 0) &= 0 \\
V(Z, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{2-26}$$

## 2.2 Ecuaciones de penachos térmicos

El problema del penacho térmico se describe a través de un campo fluido con velocidad uniforme  $U_\infty$  dentro del cual se introduce un foco de calor de radio  $L_F$ . Este foco de calor provoca una discontinuidad en la velocidad produciéndose una situación de chorro bidimensional (ver Figura 1-7.b). El movimiento del fluido se produce por un mecanismo de convección libre gobernado por las fuerzas de flotabilidad en el campo gravitacional terrestre asociadas a las variaciones de densidad. El calor transferido por el foco al fluido provoca un aumento en la temperatura del fluido cercano al foco y, consecuentemente, un decremento de la densidad que desencadena el movimiento del fluido más caliente en la dirección longitudinal. Esta situación aparece, por ejemplo, por la presencia de un cuerpo caliente inmerso en el seno de un fluido, como los volcanes o el humo de un cigarro (Figura 2-4). En este caso, como se tiene una velocidad uniforme en el fluido circundante,  $U_\infty$ , se puede decir que se trata de un problema mixto de convección forzada y libre, pero se van a utilizar las ecuaciones de convección libre ya que es el mecanismo dominante. Según [3], en este tipo de flujos (convección libre) el parámetro  $Gr/Re^2$  es de orden unidad, por lo que se tiene un criterio matemático para comprobar que es necesario considerar las fuerzas de flotabilidad.

$$\begin{aligned}
Gr &= \frac{g\beta L^3 (t_c - t_\infty)}{v^2} \sim 10^4 \quad ; \quad Re = \frac{u_c L}{v} \sim 10^2 \\
Gr/Re^2 &\sim 1
\end{aligned} \tag{2-27}$$

Se puede, por tanto, resolver el problema en el seno de un campo fluido con velocidad uniforme,  $U_\infty$ , sin perder la generalidad. Si no fuera así, la velocidad nula en el fluido circundante provocaría problemas numéricos de consistencia, por lo que habría que incluir alguna variante en la formulación para solventar los problemas de consistencia numérica. Por último, se justifica la resolución del modelo en régimen laminar ya que el número de Reynolds,  $Re = \frac{u_c L_F}{v} \sim 10^2$ , es lo suficientemente pequeño.



Figura 2-4. Penacho térmico en el interior del manto terrestre causante de erupciones volcánicas.

Se trata de un problema algo más complejo que los anteriores, ya que se hace necesario incluir un término adicional en la ecuación de cantidad de movimiento llamado el empuje de Arquímedes o fuerzas de flotabilidad, además del término que modela el foco de calor en la ecuación de la energía. Esto va a provocar que las ecuaciones ya no estén desacopladas, teniendo que resolverse el sistema de 3 ecuaciones simultáneamente en cada paso aguas abajo en el campo fluido, lo cual va a aumentar considerablemente el coste computacional requerido.

De forma general, este problema van a plantearse con dos variantes geométricas. Se van a estudiar los casos del penacho plano (bidimensional) y el penacho axilsimétrico (tridimensional), los cuales tienen una formulación muy similar tanto en las condiciones de contorno como en los cambios de variable adimensionales. Las únicas diferencias se encuentran en los sistemas de ejes en los que se desarrollan las ecuaciones generales y en los valores numéricos de la solución final de las variables del problema.

### 2.2.1 Ecuaciones de penachos térmicos bidimensionales

Teniendo en cuenta estas consideraciones y las simplificaciones utilizadas en apartados anteriores, las ecuaciones (2-1) en el sistema cartesiano y proyectada en el sentido del movimiento del fluido serían:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(t - t_{\infty}) \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
 \rho C_p \left( u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) &= K \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + A Q e^{-\frac{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2}{L_F^2}}
 \end{aligned} \tag{2-128}$$

Donde  $g$  es la aceleración de la gravedad en la dirección de avance del fluido,  $\beta$  es el coeficiente de dilatación de los gases y  $C_p$  es el calor específico a presión constante. Estos últimos dos coeficientes junto con el coeficiente de conductividad térmica  $K$  y la viscosidad  $\mu$  van a suponerse constantes con la temperatura. Matemáticamente, la hipótesis de propiedades constantes se expresa a través de la aproximación de Boussinesq. Esta aproximación nos va a permitir seguir considerando la densidad  $\rho \approx cte$ , lo cual es muy importante ya que de esta forma se pueden seguir utilizando las ecuaciones de flujo incompresible. La

aproximación de Boussinesq se resume:

$$\frac{t - t_{\infty}}{t_{\infty}} \ll 1 \quad (2-29)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \beta(t - t_{\infty}) \sim \frac{t - t_{\infty}}{t_{\infty}} \ll 1$$

Esta aproximación se puede tomar para todas las propiedades físicas y, tomando el límite  $\frac{t-t_{\infty}}{t_{\infty}} \rightarrow 0$ , todas las propiedades físicas permanecen constantes. En el problema del penacho térmico, se van a tener variaciones de temperatura  $\frac{t-t_{\infty}}{t_{\infty}} \sim 10^{-1}$ , por lo que hay que ser cuidadoso con los resultados que se obtienen.

El término que modela el aporte de calor a través del foco de radio  $L_F$  en la ecuación de la energía representa una función “campana de Gauss”, gracias a la cual se tiene el valor  $Q$  en el centro del foco de calor y tiende a cero cuando  $x$  e  $y$  tienden a infinito. El punto  $(x_F, y_F)$  es el punto donde se sitúa el centro del foco de calor, el cual va a ser a partir de ahora  $(x_F, 0)$ . Gráficamente, la función  $e^{-r^2}$  se puede representar de la siguiente manera:

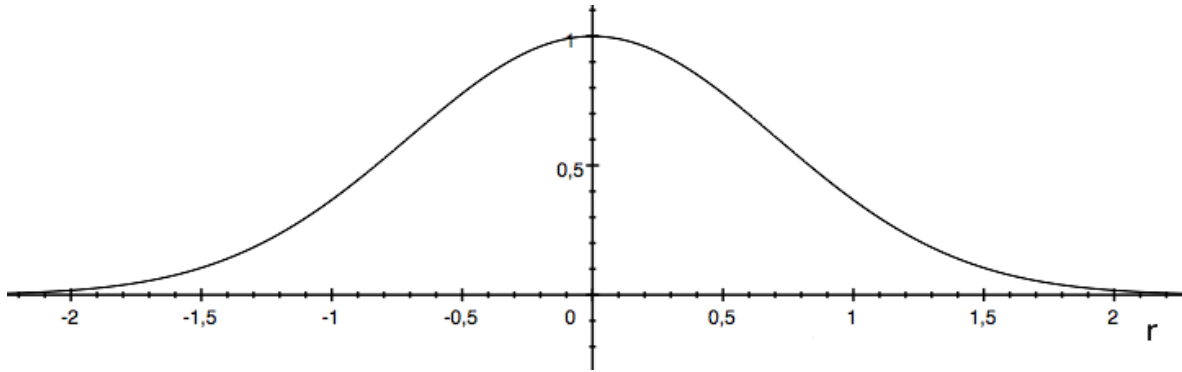


Figura 2-5. Función del foco de calor.

donde  $r$  representa la dirección radial  $r^2 = x^2 + y^2$  en el foco de calor.

Por último, se ha formulado la ecuación de la energía introduciendo una constante  $A$  [ $1/m^2$ ] que se ajustará a través de la relación

$$Q = \rho C_p \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t_{\infty}) dy \quad [W/m] \quad (2-30)$$

obteniendo

$$A = \frac{2}{\pi L_F^2} \quad (2-31)$$

por lo que la ecuación de cantidad de movimiento de (2-28) queda

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{2}{\pi L_F^2} Q e^{-\frac{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2}{L_F^2}} \quad (2-132)$$

### 2.2.1.1 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno del problema resultan similares a las condiciones de contorno dadas para los problemas anteriores, con la salvedad de que ahora hay que añadir las condiciones de contorno del problema térmico. Se trata de condiciones más sencillas que en los problemas anteriores, ya que la dificultad radica en el modelo del foco de calor. Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= u_{\infty} \\
 u(x, \infty) &= u_{\infty} \\
 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0 \\
 v(x, 0) &= 0 \\
 t(0, y) &= t_{\infty} \\
 t(x, \infty) &= t_{\infty} \\
 \frac{\partial t}{\partial y}(x, 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

Comentar que se puede formular una variante del problema en la cual desaparece el foco de calor  $Q$  y se sustituye la condición de contorno  $t(0, y) = t_{\infty}$  por:

$$t(0, y) = t(y)$$

Problema en el cual se produce también una discontinuidad en la velocidad a causa de la citada discontinuidad en la temperatura, función de la coordenada  $y$ .

### 2.2.1.2 Adimensionalización

Para llegar a deducir los cambios de variable adecuados en este problema se va a realizar el mismo procedimiento llevado a cabo en el apartado 2.1.1.2. Van a tomarse órdenes de magnitud en las ecuaciones (2-28) para deducir las dimensiones características de las variables del problema.

Los términos convectivos se aproximan igual que en los apartados anteriores:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_c^2}{L} \quad ; \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{v_c u_c}{y_c} \tag{2-34}$$

Los términos viscoso y de flotabilidad quedan:

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim v \frac{u_c}{y_c^2} \quad ; \quad g\beta(t - t_{\infty}) \sim g\beta(t_c - t_{\infty}) \tag{2-35}$$

Y los términos restantes de la ecuación de la energía:

$$u \frac{\partial t}{\partial x} \sim u_c \frac{(t_c - t_{\infty})}{L} \quad ; \quad K \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \sim K \frac{(t_c - t_{\infty})}{y_c^2} \quad ; \quad Q \sim \rho C_p u_c (t_c - t_{\infty}) y_c \tag{2-36}$$

Una vez definidas las magnitudes características del problema, van a igualarse los términos semejantes en las



ecuaciones (2-28) en aras de elegir los cambios de variable adecuados.

$$\begin{aligned}\frac{u_c^2}{L} &= \nu \frac{u_c}{y_c^2} \\ \frac{u_c^2}{L} &= g\beta(t_c - t_\infty) \\ \frac{u_c}{L} &= \frac{v_c}{y_c}\end{aligned}\tag{2-37}$$

Entonces se obtienen las dimensiones características:

$$\begin{aligned}u_c &= \frac{\nu}{L} \sqrt{Gr} \\ y_c &= \frac{L}{Gr^{1/4}} \\ (t_c - t_\infty) &= \frac{\nu^2 Gr}{g\beta L^3} \\ v_c &= \frac{\nu}{L} Gr^{1/4} \\ Q &= \frac{\rho C_p \nu^3}{g\beta L^3} Gr^{5/4}\end{aligned}\tag{2-38}$$

donde  $Gr$  es el número de Grashof. A continuación, se suponen semejantes los términos de la ecuación de la energía:

$$\rho C_p u \frac{\partial t}{\partial x} \sim \frac{2}{\pi L_F^2} Q e^{-\frac{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2}{L_F^2}}$$

de forma que se asume

$$\frac{\rho C_p u_c (t_c - t_\infty)}{L} = \frac{Q}{L_F^2}\tag{2-39}$$

y, sustituyendo en (2-39) las dimensiones características de (2-38) se llega a la relación

$$L = L_F Gr^{1/8}\tag{2-40}$$

Se trata de un importante resultado debido a que, a pesar de la cantidad de parámetros de los que depende el problema, se llega a deducir la longitud característica longitudinal en función del radio del foco y el número adimensional de Grashof. Ocurre lo mismo con el resto de dimensiones características y con la potencia calorífica aportada, la cual se va a variar en función del  $Gr$ . Finalmente, los cambios de variables son:

$$\begin{aligned}x &= XL = XL_F Gr^{1/8} \\ y &= Yy_c = Y \frac{L}{Gr^{1/4}} = Y \frac{L_F}{Gr^{1/8}} \\ u &= Uu_c = U \frac{\nu}{L} \sqrt{Gr} = U \frac{\nu}{L_F} Gr^{3/8} \\ v &= Vv_c = V \frac{\nu}{L} Gr^{1/4} = V \frac{\nu}{L_F} Gr^{1/8} \\ (t - t_\infty) &= T(t_c - t_\infty) = T \frac{\nu^2 Gr}{g\beta L^3} = T \frac{\nu^2 Gr^{5/8}}{g\beta L_F^3}\end{aligned}\tag{2-41}$$

Las ecuaciones en forma adimensional tras realizar los cambios de variable quedan:

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + T \\
 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \\
 U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + e^{-[Gr^{1/4}(X-X_F)^2 + Y^2/Gr^{1/4}]}
 \end{aligned}
 \tag{2-42}$$

Donde  $Pr$  representa el número adimensional de Prandtl.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} \tag{2-43}$$

Por último, las condiciones de contorno en forma adimensional quedan:

$$\begin{aligned}
 U(0, Y) &= U_\infty \\
 U(X, \infty) &= U_\infty \\
 \frac{\partial U}{\partial Y}(X, 0) &= 0 \\
 V(X, 0) &= 0 \\
 T(0, Y) &= 0 \\
 T(X, \infty) &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial Y}(X, 0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2-44}$$

### 2.2.2 Ecuaciones de penachos térmicos axilsimétricos

Teniendo en cuenta todas las hipótesis, aproximaciones y simplificaciones realizadas en los apartados anteriores, las ecuaciones de penachos térmicos (2-28) proyectadas en un sistema de coordenadas cilíndricas quedarían:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g\beta(t - t_\infty) \\
 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} &= 0 \\
 \rho C_p \left( u \frac{\partial t}{\partial z} + v \frac{\partial t}{\partial r} \right) &= \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + A Q e^{-\frac{(z-z_F)^2 + (r-r_F)^2}{L_F^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2-145}$$

El término del foco de calor de la ecuación de la energía ha sido descrito en el apartado 2.2.1 y, en este caso, funciona de la misma forma con la salvedad de que la dirección radial  $z^2 + r^2$  se proyecta en un plano  $\phi = cte$  del sistema cilíndrico en vez del plano cartesiano. La potencia calorífica se define en este caso como

$$Q = 2\pi\rho C_p \int_0^\infty u(t - t_\infty) r dr [W] \quad (2-46)$$

llegando la constante

$$A = \frac{2}{\pi^{3/2} L_F^3} \quad (2-47)$$

y sustituyendo en (2-45)

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial t}{\partial z} + v \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{2}{\pi^{3/2} L_F^3} Q e^{-\frac{(z-z_F)^2 + (r-r_F)^2}{L_F^2}} \quad (2-48)$$

### 2.2.2.1 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno del problema resultan similares a las condiciones de contorno dadas para el problema plano, aunque en este caso se proyectan en el sistema cilíndrico. Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} u(0, r) &= u_\infty \\ u(z, \infty) &= u_\infty \\ \frac{\partial u}{\partial r}(z, 0) &= 0 \\ v(z, 0) &= 0 \\ t(0, r) &= t_\infty \\ t(z, \infty) &= t_\infty \\ \frac{\partial t}{\partial r}(z, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-49)$$

Al igual que en el problema plano, se puede formular una variante del problema en la cual desaparece el foco de calor  $Q$  y se sustituye la condición de contorno  $t(0, r) = t_\infty$  por:

$$t(0, r) = t(r)$$

Problema en el cual se produce también una discontinuidad en la velocidad a causa de la citada discontinuidad en la temperatura, función de la coordenada  $r$ .

### 2.2.2.2 Adimensionalización

Realizando en mismo proceso que en el apartado 2.2.1.2, se tienen las siguientes dimensiones características:

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{\nu}{L} \sqrt{Gr} \\ r_c &= \frac{L}{Gr^{1/4}} \\ (t_c - t_\infty) &= \frac{\nu^2 Gr}{g\beta L^3} \end{aligned} \quad (2-50)$$

$$v_c = \frac{\nu}{L} Gr^{1/4}$$

$$Q = \frac{\rho C_p \nu^3}{g \beta L^2} Gr$$

$$L = L_F Gr^{1/6}$$

Finalmente, los cambios de variables son:

$$\begin{aligned} z &= ZL = ZL_F Gr^{1/6} \\ r &= Rr_c = R \frac{L}{Gr^{1/4}} = R \frac{L_F}{Gr^{1/12}} \\ u &= Uu_c = U \frac{\nu}{L} \sqrt{Gr} = U \frac{\nu}{L_F} Gr^{1/3} \\ v &= Vv_c = V \frac{\nu}{L} Gr^{1/4} = V \frac{\nu}{L_F} Gr^{1/12} \\ (t - t_\infty) &= T(t_c - t_\infty) = T \frac{\nu^2 Gr}{g \beta L^3} = T \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{g \beta L_F^3} \end{aligned} \quad (2-51)$$

Las ecuaciones en forma adimensional tras realizar los cambios de variable quedan:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial Z} + V \frac{\partial U}{\partial R} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + T \\ \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial (RV)}{\partial R} &= 0 \\ U \frac{\partial T}{\partial Z} + V \frac{\partial T}{\partial R} &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + e^{-[Gr^{1/3}(Z-Z_F)^2 + R^2/Gr^{1/6}]} \end{aligned} \quad (2-52)$$

Donde  $Pr$  representa el número adimensional de Prandtl.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} \quad (2-53)$$

Por último, las condiciones de contorno en forma adimensional quedan:

$$\begin{aligned} U(0, R) &= U_\infty \\ U(Z, \infty) &= U_\infty \\ \frac{\partial U}{\partial R}(Z, 0) &= 0 \\ V(Z, 0) &= 0 \\ T(0, R) &= 0 \\ T(Z, \infty) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial R}(Z, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-54)$$

## 2.3 Método numérico de las diferencias finitas

### 2.3.1. Mallado del campo fluido

En este apartado se va a tomar como referencia el problema del chorro bidimensional con condiciones de contorno en velocidad (apartado 2.1.2.1). El problema se ha formulado a través de las dos ecuaciones de Navier-Stokes en derivadas parciales. Para trabajar con ellas se hace necesario discretizarlas a través de una formulación en diferencias finitas dentro de un mallado adecuado del campo fluido. En este caso, se va a utilizar un mallado uniforme en las dos dimensiones del espacio en las que se va a trabajar (Figura 2-3).

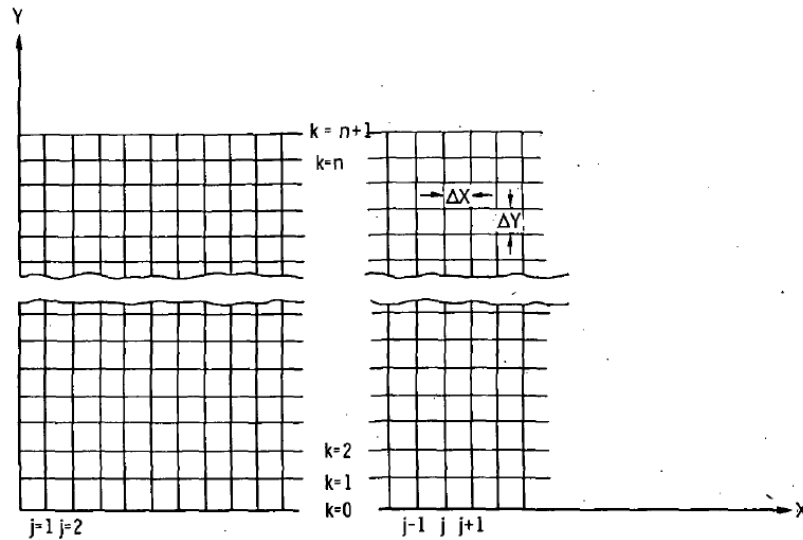


Figura 2-6. Esquema del mallado uniforme de las diferencias finitas.

Se ha utilizado un mallado uniforme en la dirección “Y” debido a las dificultades que se encuentran en la formulación con un mallado variable. Por ejemplo, en la formulación de una derivada parcial utilizando “diferencias centradas” se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} \quad (2-55)$$

Si en el punto  $k = p$  se tiene un cambio en el valor de  $\Delta Y$ , la derivada parcial (2-55) en  $k = p$  debe tener en cuenta este cambio. En el tramo comprendido entre  $p - 1$  y  $p$ , el valor de  $\Delta Y$  es diferente que en el tramo entre  $p$  y  $p + 1$ , por tanto no se puede decir que el incremento en “Y” en esta derivada parcial es  $2\Delta Y$ . Esta distinción es necesario tenerla en cuenta en cada punto en que se quiera realizar un cambio en el tamaño de la malla. En el problema del chorro libre, únicamente sería de utilidad aumentar el tamaño de la malla en los valores en los que  $Y \rightarrow \infty$ , por tanto, se va a prescindir del mallado variable.

Respecto a la utilización de un mallado de tamaño variable en la dirección “X”, la realización práctica resulta mucho más sencilla ya que solo se encuentran derivadas primeras y, además, no se utilizan diferencias centradas. Aún así, en este problema tampoco se va a utilizar un mallado variable en la dirección “X” ya que no hay ningún punto  $X(j)$  donde las variables cambien con una rapidez significativamente mayor que en otros, como puede ser el borde de ataque de una placa plana en un problema de capa límite o los puntos cercanos a la placa. Los efectos de puntos de singularidad en la teoría de la capa límite como puede ser un borde de ataque o la entrada de flujo en un canal pueden ser confinados según [1] en una región muy cercana a la singularidad si se utiliza en esta zona un mallado del orden de  $1/100$  con respecto al resto del dominio fluido. En el problema

que se va a resolver en este trabajo no se encuentran estas circunstancias por lo que se va prescindir del mallado variable también en la dirección “X”. Hornbeck recomienda en [1] la utilización de un tamaño de malla entre  $10^{-1}$  y  $10^{-2}$  para la dirección transversal y alrededor de  $10^{-3}$  para la longitudinal como valores orientativos. A partir de aquí, se darán más detalles al respecto en los apartados de la resolución del problema.

La formulación utilizada en (2-55) se describe a través del modelo en diferencias finitas que se detalla a continuación.

### 2.3.2. Discretización en diferencias finitas

Una vez formuladas las ecuaciones en forma adimensional junto con sus condiciones de contorno, llega el momento de calcular las derivadas parciales numéricamente para llegar a la solución de las variables de cada problema. Para ello, es necesario discretizar las derivadas parciales dentro del mallado del campo fluido que se ha detallado en el apartado anterior. La representación en diferencias finitas de las derivadas parciales parte de las series de Taylor. Para sustituir una derivada parcial por una representación en diferencias finitas es necesario plantear la serie de Taylor de la función en cuestión y despejar la derivada que se quiere calcular. Por ejemplo, para una función genérica  $H(x)$  en un punto genérico  $x = x_0$ :

$$H(x) = H(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_{x=x_0} + \dots \quad (2-56)$$

Ahora, sustituyendo por la notación utilizada en este trabajo:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \Delta x \\ H(x) &= H(x_0 + \Delta x) = H_{j+1} \\ H(x_0) &= H_j \\ \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_0} &= \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j, etc \end{aligned} \quad (2-57)$$

se tiene

$$H_{j+1} = H_j + \Delta x \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_j + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_j + \dots \quad (2-58)$$

Y despejando, la ecuación (2-58) puede ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_{j+1} - H_j}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_j - \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_j + \dots \quad (2-59)$$

Asumiendo que  $\Delta x$  es pequeño y que las derivadas de  $H$  son finitas pero desconocidas, el término que domina el error en la ecuación (2-59) va a ser probablemente  $\frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_j$ . Como la única parte del término que está bajo nuestro control es  $\Delta x$ , entonces podemos decir que

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_{j+1} - H_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2-60)$$

donde  $O(\Delta x)$  se interpreta como “de orden  $\Delta x$ ”. La ecuación (2-60) se denomina la “representación en diferencias hacia delante” (“forward difference representation”) de  $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j$  con error de orden  $\Delta x$ .

Definiendo ahora

$$H_{j-1} = H(x_0 - \Delta x) \quad (2-61)$$

y expandiendo su serie de Taylor alrededor de  $x_0$  se tiene:

$$H_{j-1} = H_j - \Delta x \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_j - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_j + \dots \quad (2-62)$$

Despejando para  $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j$  se obtiene

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_j - H_{j-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_j - \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_j + \dots \quad (2-63)$$

Entonces, análogamente al desarrollo anterior, se puede decir que

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_j - H_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2-64)$$

expresión llamada “expresión en diferencias hacia atrás” (backwards difference expression”) de  $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j$  con error de orden  $\Delta x$ .

Para obtener la “expresión en diferencias centradas” (“central difference expression”) de una derivada parcial es necesario combinar las ecuaciones (2-58) y (2-62) y despejar la derivada en cuestión. Así, restando la ecuación (2-62) a la ecuación (2-58), se obtiene:

$$H_{j+1} - H_{j-1} = 2(\Delta x) \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j + 2 \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_j + \dots \quad (2-65)$$

Resolviendo para  $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j$  se puede decir que

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_{j+1} - H_{j-1}}{2(\Delta x)} - \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_j - \frac{\Delta x^4}{5!} \left. \frac{\partial^5 H}{\partial x^5} \right|_j + \dots \quad (2-66)$$

y análogamente a los razonamientos anteriores:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_{j+1} - H_{j-1}}{2(\Delta x)} + O(\Delta x^2) \quad (2-67)$$

Ya que  $\Delta x$  es pequeño, la expresión (2-67) es mucho más precisa que las expresiones (2-60) y (2-64). Por ello, es la expresión que se va a utilizar para modelar las derivadas  $\frac{\partial U}{\partial y}$ , ya que los perfiles de velocidad  $U$  van experimentar mayores cambios en la coordenada  $y$  que en la coordenada  $x$ . Para el resto de derivadas primeras se va a utilizar la “expresión en diferencias hacia delante” (2-60).

Por último, sólo se va a formular una expresión en diferencias finitas de derivada segunda. Para ello, hay que igualar las expresiones de  $\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_j$  dadas por las ecuaciones (2-59) y (2-63) y resolver para  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_j$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_j = \frac{H_{j+1} - 2H_j + H_{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 H}{\partial x^4}\Big|_j + \dots + O(\Delta x^4) \quad (2-68)$$

Y, por tanto, se llega a la “expresión en diferencias centradas segunda” con error de orden  $\Delta x^2$  para  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_j$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_j = \frac{H_{j+1} - 2H_j + H_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2-69)$$

### 2.3.3. Tipos de representaciones: explícitas e implícitas

Existen tres formas de discretizar las ecuaciones en derivadas parciales: forma implícita, explícita y semiimplícita.

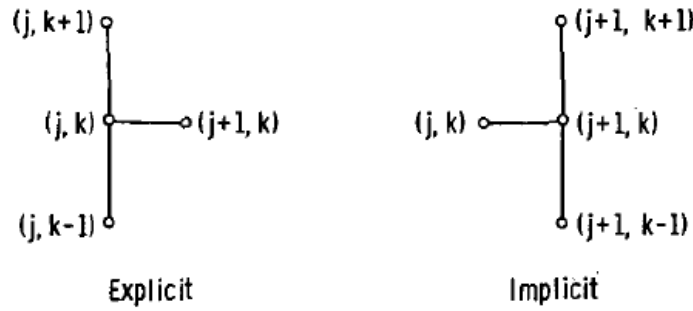


Figura 2-7. Esquema de las tres formas de diferencias finitas.

Como puede observarse en la Figura 2-4, la forma explícita sólo tiene la incógnita  $(j + 1, k)$  en cada ecuación, por lo que puede resolverse directamente para cada punto  $(j, k)$ , donde  $u_{j,k}$  es el último valor de la velocidad que se conoce. Evidentemente, se trata de la forma que tiene menor coste computacional, aunque puede tener algunos problemas de estabilidad en problemas con velocidades muy pequeñas o que alcancen cero. Según [1], el criterio de estabilidad lo dio Rouleau siendo  $\frac{v\Delta X}{U_{j,k}\Delta Y^2} \leq \frac{1}{2}$  y  $\frac{|V_{j,k}|\Delta Y}{v} \leq 2$ , el cual es irrelevante ya que no se va a utilizar la forma explícita. Como ejemplo, la ecuación de cantidad de movimiento en forma explícita (2-70).

$$U_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X} + V_{j,k} \frac{U_{j,k+1} - U_{j,k-1}}{2\Delta Y} = \frac{U_{j,k+1} - 2U_{j,k} + U_{j,k-1}}{\Delta Y^2} \quad (2-70)$$

La forma implícita involucra tres incógnitas en cada ecuación, por lo que para su resolución es necesario resolver un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas (cada valor de  $k$ ) de forma simultánea (2-71). Este método es más costoso en términos de costo computacional pero aplicando ciertas técnicas de cálculo matricial el tiempo de cálculo se reduce notablemente. Esta forma de diferencias finitas no tiene ninguna restricción de estabilidad mientras que la velocidad longitudinal sea positiva (como es nuestro caso).

$$U_{j+1,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X} + V_{j+1,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} = \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{\Delta Y^2} \quad (2-71)$$



El único inconveniente de este tipo de representación es que da lugar a un sistema no lineal ya que las incógnitas  $U_{j+1,k}$  y  $V_{j+1,k}$  se encuentran multiplicándose. En esta formulación fuertemente no lineal se van a encontrar incógnitas en los coeficientes “constantes” de las matrices de resolución. Para resolver las ecuaciones con esta formulación, se hace necesario utilizar algún método iterativo para resolver las incógnitas de un paso de  $X$  antes de saltar al siguiente. Por su complejidad, esta formulación no se va a utilizar en el presente trabajo y, para evitar la no linealidad de la formulación, se van a hacer las siguientes aproximaciones:

$$U_{j+1,k} \approx U_{j,k} \quad ; \quad V_{j+1,k} \approx V_{j,k} \quad (2-72)$$

Introduciendo en (2-71) la aproximación (2-72) se obtiene la formulación semiimplícita,

$$U_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} = \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{\Delta Y^2} \quad (2-73)$$

la cual da lugar a un sistema lineal que se va a utilizar en la resolución de los problemas de este trabajo. La formulación implícita escogida, aunque resulta adecuada en términos de estabilidad y velocidad de cálculo, puede volverse inconsistente si se tienen velocidades secundarias muy pequeñas, cercanas a cero o igual a cero. Sólo puede asegurarse la consistencia de la solución obtenida si la relación  $\frac{u_s}{u_p} = \lambda$  es de orden  $10^{-1}$  o mayor. Según Hornbeck en [1], si  $u_p$  no es del mismo orden de magnitud que  $u_s$ , los perfiles de velocidad  $U$  decrecen linealmente desde el borde del chorro hasta el valor de  $Y$  que se haya elegido como infinito (por muy grande que sea). Esta afirmación es rebatible, ya que si se elige un valor  $Y_\infty$  muy grande con un mallado suficientemente fino, este efecto se mitiga en gran parte como se podrá comprobar en el capítulo de resultados de los problemas. Para acabar con esta inconsistencia, Hornbeck propone utilizar la formulación implícita (2-71) en la ecuación de cantidad de movimiento sin utilizar las aproximaciones (2-72).

La ecuación de continuidad se suele escribir en forma explícita. La forma que se va a usar en todos los problemas es:

$$\frac{U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1}}{\Delta X} + \frac{V_{j+1,k+1} - V_{j+1,k}}{\Delta Y} = 0 \quad (2-74)$$

### 2.3.4. Modelos en diferencias finitas de los problemas estudiados

Ya se tienen las ecuaciones de los problemas a resolver formuladas y adimensionalizadas, las condiciones de contorno dadas y el mallado del campo fluido realizado. Tras formular el modelo en diferencias finitas de forma genérica, va a aplicarse a cada uno de los problemas estudiados para resolver finalmente las ecuaciones lineales utilizando los métodos numéricos.

#### 2.3.4.1. Chorro bidimensional

La obtención de las ecuaciones (2-18) y la formulación en diferencias finitas de forma genérica en los apartados anteriores nos lleva a la formulación en diferencias finitas de forma implícita de las ecuaciones del problema.

$$U_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} = \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{\Delta Y^2} \quad (2-75)$$

$$\frac{U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1}}{\Delta X} + \frac{V_{j+1,k+1} - V_{j+1,k}}{\Delta Y} = 0$$

Es necesario, también, la formulación en diferencias finitas de una de las condiciones de contorno (2-19)  $\frac{\partial U}{\partial Y}(X, 0) = 0$  para poder incorporarla al problema:

$$\frac{U_{j+1,1} - U_{j+1,-1}}{2\Delta Y} = 0 \quad (2-76)$$

Por tanto, se obtiene la condición de simetría:

$$U_{j+1,1} = U_{j+1,-1} \quad (2-77)$$

Ahora, si se escribe la ecuación de cantidad de movimiento de (2-75) para  $k = 0$

$$U_{j,0} \frac{U_{j+1,0} - U_{j,0}}{\Delta X} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,1} - U_{j+1,-1}}{2\Delta Y} = \frac{U_{j+1,1} - 2U_{j+1,0} + U_{j+1,-1}}{\Delta Y^2} \quad (2-78)$$

se obtiene, junto con la condición (2-77):

$$U_{j,0} \frac{U_{j+1,0} - U_{j,0}}{\Delta X} = 2 \left( \frac{U_{j+1,1} - U_{j+1,0}}{\Delta Y^2} \right) \quad (2-79)$$

Escribiendo la ecuación (2-79) de una forma más cómoda para su resolución se tiene la ecuación de cantidad de movimiento para  $k = 0$ :

$$\left( \frac{U_{j,0}}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2} \right) U_{j+1,0} + \left( \frac{-2}{\Delta Y^2} \right) U_{j+1,1} = \frac{U_{j,0}^2}{\Delta X} \quad (2-80)$$

que, junto con la ecuación de cantidad de movimiento en (2-75) reescrita de esta forma para todo  $k$ :

$$\left( -\frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2} \right) U_{j+1,k-1} + \left( \frac{U_{j,k}}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2} \right) U_{j+1,k} + \left( \frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2} \right) U_{j+1,k+1} = \frac{U_{j,k}^2}{\Delta X} \quad (2-81)$$

se tiene el conjunto de  $(n + 1)$  ecuaciones lineales escritas para  $k = 1:n$  que pueden ser escritas de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & -\frac{2}{\Delta Y^2} & & & & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \Omega_1 & & & & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \Omega_2 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \Omega_{n-1} & & \\ & & & & & \alpha_n & \beta_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1,0} \\ U_{j+1,1} \\ U_{j+1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{j+1,n-1} \\ U_{j+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n - \Omega_n U_s(\infty) \end{bmatrix} \quad (2-82)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2} \\ \beta_k &= \frac{U_{j,k}}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2} \\ \Omega_k &= \frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2} \end{aligned} \quad (2-83)$$

$$\phi_k = \frac{(U_{j,k})^2}{\Delta X}$$

En cada paso de  $X$  el conjunto de ecuaciones (2-82) se resuelve una vez, del cual se obtiene  $U_{j+1,k}$ . Entonces, de la ecuación de continuidad en (2-75) se obtiene:

$$V_{j+1,k+1} = V_{j+1,k} - \frac{\Delta Y}{\Delta X} (U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1}) \quad (2-84)$$

La ecuación (2-84) se resuelve para cada valor de  $k$  y, entonces, la solución puede avanzar aguas abajo un paso de  $X$ .

### 2.3.4.2. Chorro axilsimétrico

La formulación en diferencias finitas de las ecuaciones de Navier-Stokes, análogamente al apartado anterior, se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta Z} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta R} \\ = \frac{1}{R_k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta R} + \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{(\Delta R)^2} \\ \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{1}{R_k} \left( \frac{V_{j+1,k+1}R_{k+1} - V_{j+1,k}R_k}{\Delta R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-85)$$

En las ecuaciones (2-85) se encuentra una singularidad para  $k = 0$  puesto que  $R_0 = 0$ . Para salvar esta circunstancia, tomando el límite cuando  $R \rightarrow 0$  en las ecuaciones (2-25) se puede decir que

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{R=0} &= \lim_{R \rightarrow 0} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \Big|_{R=0} \\ \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{R=0} + 2 \frac{\partial V}{\partial R} \Big|_{R=0} &= 0 \end{aligned} \quad (2-86)$$

Aplicando la regla de L'Hôpital en el límite y aproximando las derivadas parciales con diferencias finitas se obtiene:

$$\begin{aligned} U_{j,0} \frac{U_{j+1,0} - U_{j,0}}{\Delta Z} &= 4 \frac{U_{j+1,1} - U_{j+1,0}}{(\Delta R)^2} \\ \frac{U_{j+1,0} - U_{j,0}}{\Delta Z} + 2 \left( \frac{V_{j+1,1}}{\Delta R} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2-87)$$

donde se ha utilizado la condición de simetría (2-77) en la ecuación de cantidad de movimiento.

Ya se ha salvado la singularidad en  $R_0 = 0$ , obteniendo así la ecuación de cantidad de movimiento en la línea  $k = 0$  que, junto con el resto de ecuaciones en  $k > 0$  escritas de una forma más cómoda (2-88)

$$\begin{aligned} \left( -\frac{V_{j,k}}{2\Delta R} + \frac{1}{2R_k\Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \right) U_{j+1,k-1} + \left( \frac{U_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\Delta R^2} \right) U_{j+1,k} \\ + \left( \frac{V_{j,k}}{2\Delta R} - \frac{1}{2R_k\Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \right) U_{j+1,k+1} = \frac{U_{j,k}^2}{\Delta Z} \end{aligned} \quad (2-88)$$

somos capaces de montar en forma matricial el sistema de  $(n + 1)$  ecuaciones lineales que resolverá las  $(n + 1)$  incógnitas  $U_{j+1,k}$ :

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & -\frac{4}{\Delta R^2} & & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \Omega_1 & & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \Omega_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \Omega_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1,0} \\ U_{j+1,1} \\ U_{j+1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{j+1,n-1} \\ U_{j+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n - \Omega_n U_s(\infty) \end{bmatrix} \quad (2-89)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{V_{j,k}}{2(\Delta R)} + \frac{1}{2R_k \Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \\ \beta_k &= \frac{U_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\Delta R^2} \quad (k > 0) \\ \Omega_k &= \frac{V_{j,k}}{2(\Delta R)} - \frac{1}{2R_k \Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \\ \phi_k &= \frac{(U_{j,k})^2}{\Delta Z} \\ \beta_0 &= \frac{U_{j,0}}{\Delta Z} + \frac{4}{\Delta R^2} \quad (k = 0) \end{aligned} \quad (2-90)$$

Al igual que en el apartado anterior, una vez se ha resuelto el sistema en cada paso de  $Z$  se puede resolver las ecuaciones de continuidad de (2-87) para  $k = 0$

$$V_{j+1,1} = \frac{\Delta R}{2\Delta Z} (U_{j,0} - U_{j+1,0}) \quad (2-91)$$

y de (2-85) para  $k > 0$

$$V_{j+1,k+1} = V_{j+1,k} \left( \frac{R_k}{R_{k+1}} \right) - \frac{(\Delta R)R_k}{(\Delta Z)R_{k+1}} (U_{j+1,k} - U_{j,k}) \quad (2-92)$$

### 2.3.4.3. Penacho térmico bidimensional

Las ecuaciones (2-42) formuladas en diferencias finitas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} U_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} &= \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{\Delta Y^2} + T_{j,k} \\ \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1}}{\Delta X} + \frac{V_{j+1,k+1} - V_{j+1,k}}{\Delta Y} &= 0 \end{aligned} \quad (2-93)$$

$$U_{j+1,k} \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{\Delta X} + V_{j+1,k} \frac{T_{j+1,k+1} - T_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} = \frac{1}{Pr} \frac{T_{j+1,k+1} - 2T_{j+1,k} + T_{j+1,k-1}}{\Delta Y^2} + \frac{2}{\pi} e^{-[Gr^{1/4}(X_j - X_F)^2 + Y_k^2/Gr^{1/4}]}$$

En este caso, hay que resolver dos problemas simultáneamente y de forma acoplada: el mecánico y el térmico. En cada paso de  $X$ , primero es necesario resolver el problema mecánico de forma análoga a los apartados anteriores y, una vez se han obtenido los perfiles de velocidad  $U_{j+1,k}$  y  $V_{j+1,k}$ , se puede resolver el problema térmico de forma lineal a través de la formulación matricial que se muestra a continuación.

#### 2.3.4.3.1. Problema mecánico

Las ecuaciones de cantidad de movimiento de (2-93) puede escribirse de una forma más cómoda para su resolución de la siguiente manera para todo  $k$ :

$$\left(-\frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right)U_{j+1,k-1} + \left(\frac{U_{j,k}}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right)U_{j+1,k} + \left(\frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2}\right)U_{j+1,k+1} = \frac{U_{j,k}^2}{\Delta X} + T_{j,k} \quad (2-94)$$

La ecuación (2-94) puede ser expresada en forma matricial análogamente a los apartados anteriores:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & -\frac{2}{\Delta Y^2} & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \Omega_1 & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \Omega_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \Omega_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1,0} \\ U_{j+1,1} \\ U_{j+1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{j+1,n-1} \\ U_{j+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n - \Omega_n U(\infty) \end{bmatrix} \quad (2-95)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2} \\ \beta_k &= \frac{U_{j,k}}{\Delta X} + \frac{2}{\Delta Y^2} \\ \Omega_k &= \frac{V_{j,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{\Delta Y^2} \\ \phi_k &= \frac{(U_{j,k})^2}{\Delta X} + T_{j,k} \end{aligned} \quad (2-96)$$

Tras obtener los perfiles de velocidad  $U_{j+1,k}$ , se puede resolver

$$V_{j+1,k+1} = V_{j+1,k} - \frac{\Delta Y}{\Delta X} (U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k}) \quad (2-97)$$

Para terminar de completar el problema mecánico.

#### 2.3.4.3.2. Problema térmico

La ecuación de la energía de (2-93) se puede reescribir de una forma más práctica:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{V_{j+1,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{Pr(\Delta Y)^2} \right) T_{j+1,k-1} + \left( \frac{U_{j+1,k}}{\Delta X} + \frac{2}{Pr(\Delta Y)^2} \right) T_{j+1,k} + \left( \frac{V_{j+1,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{Pr(\Delta Y)^2} \right) T_{j+1,k+1} \\ & = \frac{U_{j+1,k} T_{j,k}}{\Delta X} + \frac{2}{\pi} e^{-[Gr^{1/4}(X_j - X_F)^2 + Y_k^2 / Gr^{1/4}]} \end{aligned} \quad (2-98)$$

Reescribiendo la ecuación (2-98) en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & -\frac{2}{Pr(\Delta Y)^2} & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \Omega_1 & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \Omega_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \Omega_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{j+1,0} \\ T_{j+1,1} \\ T_{j+1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{j+1,n-1} \\ T_{j+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (2-99)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{V_{j+1,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{Pr(\Delta Y)^2} \\ \beta_k &= \frac{U_{j+1,k}}{\Delta X} + \frac{2}{Pr(\Delta Y)^2} \\ \Omega_k &= \frac{V_{j+1,k}}{2(\Delta Y)} - \frac{1}{Pr(\Delta Y)^2} \\ \phi_k &= \frac{U_{j+1,k} T_{j,k}}{\Delta X} + \frac{2}{\pi} e^{-[Gr^{1/4}(X_j - X_F)^2 + Y_k^2 / Gr^{1/4}]} \end{aligned} \quad (2-100)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para todo  $k$  se obtiene el campo de temperaturas  $T_{j+1,k}$ , cerrando el problema térmico.

#### 2.3.4.4. Penacho térmico axilsimétrico

Las ecuaciones (2-93) formuladas en el sistema cilíndrico se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} U_{j,k} \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta Z} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta R} \\ = \frac{1}{R_k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta R} + \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{(\Delta R)^2} + T_{j,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{1}{R_k} \left( \frac{V_{j+1,k+1} R_{k+1} - V_{j+1,k} R_k}{\Delta R} \right) = 0 \\
& U_{j+1,k} \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{\Delta Z} + V_{j+1,k} \frac{T_{j+1,k+1} - T_{j+1,k-1}}{2\Delta R} \\
& = \frac{1}{Pr} \left( \frac{1}{R_k} \frac{T_{j+1,k+1} - T_{j+1,k-1}}{2\Delta R} + \frac{T_{j+1,k+1} - 2T_{j+1,k} + T_{j+1,k-1}}{(\Delta R)^2} \right) \\
& + \frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-[Gr^{1/3}(Z_j - Z_F)^2 + R_k^2/Gr^{1/6}]}
\end{aligned} \tag{2-101}$$

Al igual que en el caso plano, hay que resolver dos problemas simultáneamente y de forma acoplada: el mecánico y el térmico. En cada paso de  $X$ , primero es necesario resolver el problema mecánico de forma análoga a los apartados anteriores y, una vez se han obtenido los perfiles de velocidad  $U_{j+1,k}$  y  $V_{j+1,k}$ , se puede resolver el problema térmico de forma lineal a través de la formulación matricial que se muestra a continuación.

#### 2.3.4.4.1. Problema mecánico

Las ecuaciones de cantidad de movimiento de (2-101) puede escribirse de una forma más cómoda para su resolución de la siguiente manera para  $k > 0$ :

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{V_{j,k}}{2\Delta R} + \frac{1}{2R_k\Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \right) U_{j+1,k-1} + \left( \frac{U_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\Delta R^2} \right) U_{j+1,k} \\
& + \left( \frac{V_{j,k}}{2\Delta R} - \frac{1}{2R_k\Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \right) U_{j+1,k+1} = \frac{U_{j,k}^2}{\Delta Z} + T_{j,k}
\end{aligned} \tag{2-102}$$

Para  $k = 0$  hay que salvar la misma singularidad que en el chorro axilsimétrico porque  $R_0 = 0$ . De este modo, tomando el límite se tiene

$$U \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{R=0} = \lim_{R \rightarrow 0} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \Big|_{R=0} \tag{2-103}$$

dando lugar a

$$U_{j,0} \frac{U_{j+1,0} - U_{j,0}}{\Delta Z} = 4 \frac{U_{j+1,1} - U_{j+1,0}}{(\Delta R)^2} \tag{2-104}$$

ecuación para  $k = 0$  que junto a (2-102) para  $k > 0$  pueden ser expresadas de forma matricial análogamente a los apartados anteriores:

$$\begin{bmatrix}
\beta_0 & -\frac{4}{\Delta R^2} & & & & & & \\
\alpha_1 & \beta_1 & \Omega_1 & & & & & \\
& \alpha_2 & \beta_2 & \Omega_2 & & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \Omega_{n-1} & \\
& & & & & \alpha_n & \beta_n & 
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_{j+1,0} \\
U_{j+1,1} \\
U_{j+1,2} \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
U_{j+1,n-1} \\
U_{j+1,n}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\phi_0 \\
\phi_1 \\
\phi_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
\phi_{n-1} \\
\phi_n - \Omega_n U_s(\infty)
\end{bmatrix}
\quad (2-105)$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= -\frac{V_{j,k}}{2(\Delta R)} + \frac{1}{2R_k \Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \\
\beta_k &= \frac{U_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\Delta R^2} \quad (k > 0) \\
\Omega_k &= \frac{V_{j,k}}{2(\Delta R)} - \frac{1}{2R_k \Delta R} - \frac{1}{\Delta R^2} \\
\phi_k &= \frac{(U_{j,k})^2}{\Delta Z} + T_{j,k} \\
\beta_0 &= \frac{U_{j,0}}{\Delta Z} + \frac{4}{\Delta R^2} \quad (k = 0)
\end{aligned}
\quad (2-106)$$

Tras obtener los perfiles de velocidad  $U_{j+1,k}$ , hay que resolver la ecuación de continuidad tomando el mismo límite que en la ecuación de cantidad de movimiento

$$\left. \frac{\partial U}{\partial Z} \right|_{R=0} + 2 \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \quad (2-107)$$

dando lugar a

$$\frac{U_{j+1,0} - U_{j,0}}{\Delta Z} + 2 \left( \frac{V_{j+1,1}}{\Delta R} \right) = 0 \quad (2-108)$$

para  $k = 0$ , teniendo para  $k > 0$

$$V_{j+1,k+1} = V_{j+1,k} \left( \frac{R_k}{R_{k+1}} \right) - \frac{(\Delta R) R_k}{(\Delta Z) R_{k+1}} (U_{j+1,k} - U_{j,k}) \quad (2-109)$$

Terminando de completar el problema mecánico.

#### 2.3.4.4.2. Problema térmico

Para resolver el problema mecánico también hay que tomar el límite en  $R_0 = 0$ , en este caso en la ecuación de la energía. Así, se tiene:



$$U \frac{\partial T}{\partial Z} \Big|_{R=0} = \frac{1}{Pr} \lim_{R \rightarrow 0} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \Big|_{R=0} + \frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-[Gr^{1/3}(Z_j - Z_F)^2]} \quad (2-110)$$

dando lugar a

$$U_{j+1,0} \frac{T_{j+1,0} - T_{j,0}}{\Delta Z} = 4 \frac{T_{j+1,1} - T_{j+1,0}}{Pr(\Delta R)^2} + \frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-[Gr^{1/3}(Z_j - Z_F)^2]} \quad (2-111)$$

para  $k = 0$ , siendo para  $k > 0$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{V_{j+1,k}}{2\Delta R} + \frac{1}{2R_k \Delta R Pr} - \frac{1}{\Delta R^2 Pr} \right) T_{j+1,k-1} + \left( \frac{U_{j+1,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\Delta R^2 Pr} \right) T_{j+1,k} \\ & + \left( \frac{V_{j+1,k}}{2\Delta R} - \frac{1}{2R_k \Delta R Pr} - \frac{1}{\Delta R^2 Pr} \right) T_{j+1,k+1} \\ & = \frac{U_{j+1,k} T_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-[Gr^{1/3}(Z_j - Z_F)^2 + R_k^2 / Gr^{1/6}]} \end{aligned} \quad (2-112)$$

Reescribiendo la ecuación (2-112) en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & -\frac{4}{Pr(\Delta Y)^2} & & & & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \Omega_1 & & & & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \Omega_2 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \Omega_{n-1} & & \\ & & & & & \alpha_n & \beta_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{j+1,0} \\ T_{j+1,1} \\ T_{j+1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{j+1,n-1} \\ T_{j+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (2-113)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{V_{j+1,k}}{2(\Delta R)} + \frac{1}{2R_k \Delta R Pr} - \frac{1}{Pr(\Delta R)^2} \\ \beta_k &= \frac{U_{j+1,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{Pr(\Delta R)^2} \quad (k > 0) \\ \Omega_k &= \frac{V_{j+1,k}}{2(\Delta R)} - \frac{1}{2R_k \Delta R Pr} - \frac{1}{Pr(\Delta R)^2} \\ \phi_k &= \frac{U_{j+1,k} T_{j,k}}{\Delta Z} + \frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-[Gr^{1/3}(Z_j - Z_F)^2 + R_k^2 / Gr^{1/6}]} \\ \beta_0 &= \frac{U_{j+1,0}}{\Delta Z} + \frac{4}{Pr \Delta R^2} \quad (k = 0) \end{aligned} \quad (2-114)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para todo  $k$  se obtiene el campo de temperaturas  $T_{j+1,k}$ , cerrando el problema térmico.

## 2.4 Resultados de chorros incompresibles

Se han formulado los sistemas lineales de resolución y las condiciones de contorno en cada problema. Para resolver los problemas se va a implementar un código numérico en “Matlab” que permita reproducir el comportamiento del fluido en cada caso. Se va a estudiar, en cada caso, el efecto que provoca la variación de ciertos parámetros de entrada en los campos de velocidad y en la anchura del chorro. A modo de ejemplo, se va a mostrar una parte representativa del código en “Matlab” del chorro bidimensional.

```
%%Matrix de coeficientes y resolución para cada X(j)
for j=1:Nx
    %Coeficientes de la matriz
    alfa(1:Ny)=-V(j,1:Ny)/2/Ay - 1/Ay^2;
    beta(1:Ny)=(C+U(j,(1:Ny)+1))/Ax + 2/Ay^2;
    omega(1:Ny)=V(j,1:Ny)/2/Ay - 1/Ay^2;
    if j==1
        for k=1:Ny
            if k<flag
                fi(k)=(C+U(j,k+1)).*U(j,k+1)/Ax + C*(U(j,k+1)-Up)/Ax;
            else
                fi(k)=(C+U(j,k+1)).*U(j,k+1)/Ax + C*(U(j,k+1)-Us)/Ax;
            end
        end
    end
    else
        fi(1:Ny)=(C+U(j,(1:Ny)+1)).*U(j,(1:Ny)+1)/Ax + C*(U(j,(1:Ny)+1)-U(j-1,(1:Ny)+1))/Ax;
    end
    beta0=(C+U(j,1))/Ax + 2/Ay^2;
    if j==1
        fi0=(C+U(j,1)).*U(j,1)/Ax + C*(U(j,1)-Up)/Ax;
    else
        fi0=(C+U(j,1)).*U(j,1)/Ax + C*(U(j,1)-U(j-1,1))/Ax;
    end

    %columnas de la matriz
    E=[[alfa'; 0] [beta0; beta'] [0; -2/Ay^2; omega(1:Ny-1)']];
    A=spdiags(E,[-1 0 1],Ny+1,Ny+1);
    b=[fi0; fi(1:Ny-1)'; fi(Ny)-omega(Ny)*Usx];

    %Resolución con LU
    x1=A\b; %x=U(j+1,1:Ny)
    U(j+1,1:(Ny+1))=x1'; %U(:,1) pertenece a la línea k=0
```

```

U(j+1,Ny+2)=U(j+1,Ny+1);
V(j+1,1)=Vo - Ay/Ax*(U(j+1,2) - U(j,2)); %velocidad vertical en la primera linea sobre el eje del chorro
for k=1:Ny
V(j+1,k+1)=V(j+1,k) - Ay/Ax*(U(j+1,k+2) - U(j,k+2));
end
end

```

Los aspectos más significativos del código son los relativos a la disminución del coste computacional utilizando matrices dispersas. Aprovechando que las matrices de resolución son tridiagonales, se almacenan de forma económica en la memoria evitando almacenar los valores vacíos de las mismas con el comando *spdiags*. Otro aspecto importante se encuentra en la utilización de la variable flag (bandera) para discriminar entre la condición de contorno de chorro primario o de chorro secundario. La parte del código que no aparece en este ejemplo es la relativa a la definición de constantes, el mallado uniforme o la construcción de las gráficas entre otras cuestiones. Por último, la constante C que aparece en la definición de la constante se trata de una constante que se ha introducido en el término convectivo con el fin de evitar problemas numéricos de consistencia. Esta técnica se va a explicar en el siguiente apartado.

### 2.4.1 Efecto de Us

Se va a tomar como velocidad característica  $u_c$  la velocidad máxima del chorro en  $x = 0$ , por tanto  $u_c = u_p$ . De este modo, se tiene

$$U_p = \frac{u_p}{u_c} = 1 \quad ; \quad U_s = \frac{u_s}{u_c} = \frac{u_s}{u_p} = \lambda \quad (2-115)$$

Por tanto, el parámetro de entrada en este caso es  $\lambda$ . Se va a estudiar el efecto que provoca la variación de  $\lambda$  en la velocidad máxima del chorro con respecto de  $x$ ,  $U_0(x)$ , y en la anchura del chorro con respecto de  $x$ ,  $\delta(x)$ . Esta anchura se define como la coordenada  $y(x)$  en la cual la velocidad del chorro es la mitad de su velocidad máxima,  $u_0(x)$ . Esta definición ha sido dada para un chorro que evoluciona en una atmósfera donde el fluido circundante tiene velocidad nula. Como en nuestro caso el fluido circundante tiene velocidad  $U_\infty$  no nula, se ha definido la anchura del chorro para cada  $x$  de modo que

$$U(y) - U_\infty = \frac{1}{2} (U(0) - U_\infty) \quad (2-116)$$

Análogamente, se puede hacer el mismo razonamiento con el chorro axilsimétrico cambiando la  $x$  por la  $z$  y la  $y$  por la  $r$ ; por tanto, a partir de ahora se va a hablar de  $X$  como la coordenada longitudinal y de  $Y$  como la coordenada transversal. De esta forma, se va a comparar la evolución de los dos chorros. Para calcular los resultados, se van a tener en cuenta las recomendaciones de [1] para elegir el tamaño de la malla. Por ello, se van a utilizar incrementos de  $X$  e  $Y$  de forma que

$$\Delta X \leq 10^{-3} \quad ; \quad \Delta Y \leq 10^{-2} \div 10^{-1} \quad (2-117)$$

Primero, se va a presentar una serie de perfiles típicos de la velocidad del chorro. Para  $\lambda = 0.8$ , los perfiles de velocidad  $U(X, Y)$  desde la salida del chorro en  $X = 0$  hasta  $X = 1$  son

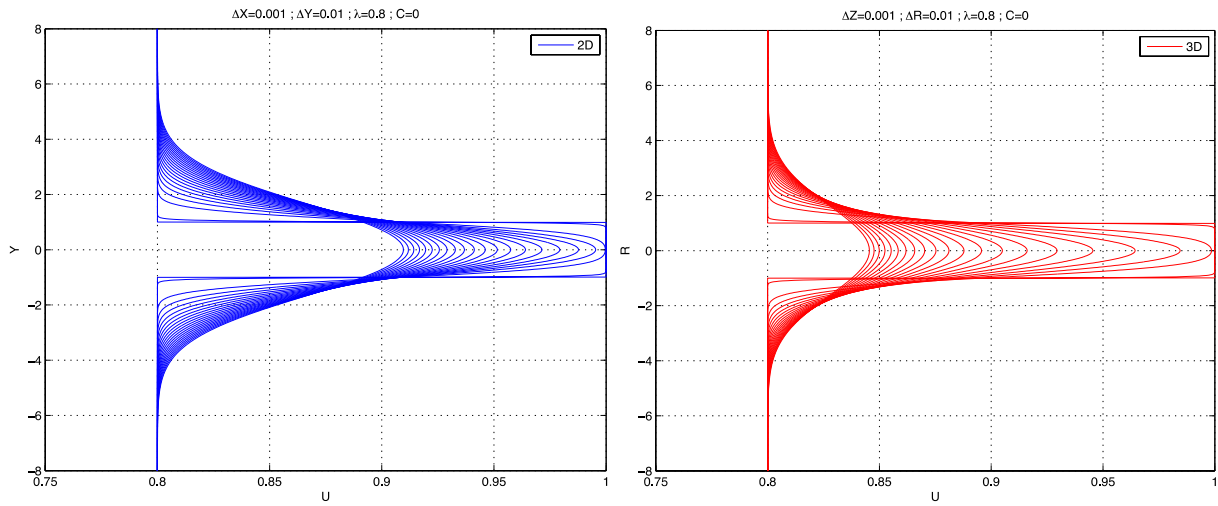


Figura 2-8. Perfiles de velocidades longitudinales típicos en chorros incompresibles

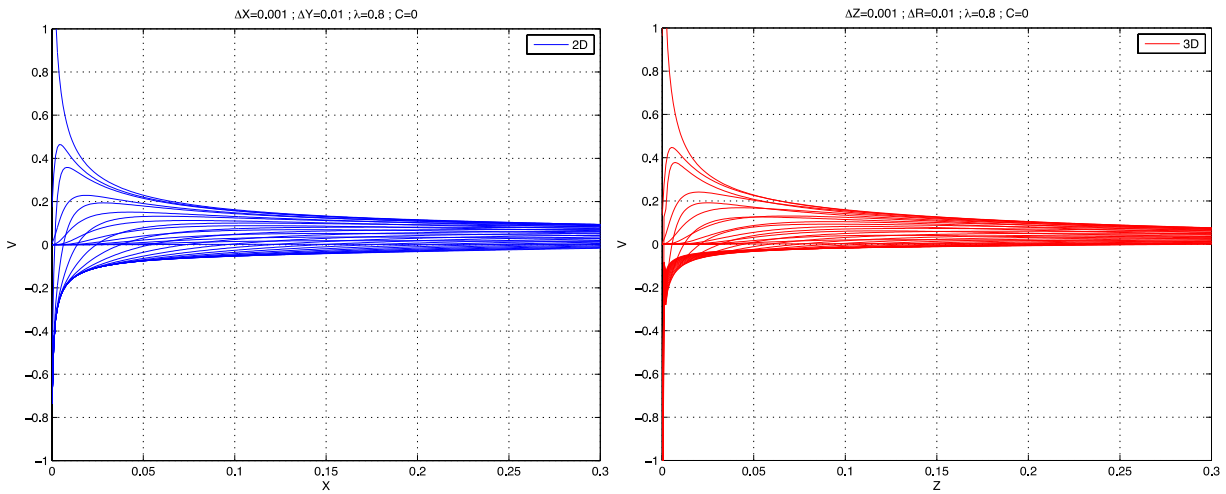


Figura 2-9. Perfiles de velocidades transversales típicos en chorros incompresibles.

La velocidad del chorro se va atenuando con la coordenada longitudinal debido a la viscosidad del fluido. Este efecto se ve aumentado en el caso tridimensional debido a que se trata de un flujo con área de paso finita, por tanto se intensifica el efecto de frenada provocado por la viscosidad que incide sobre esta área. Respecto a los perfiles de velocidad en cada estación  $U(Y)$ , se observa cómo la velocidad impuesta en el centro del chorro arrastra a las partículas fluidas de su alrededor aumentando su energía cinética. Esta energía cinética es la que pierde el chorro en el centro, efecto que se ve aumentado aguas abajo donde la velocidad en el centro  $U(0)$  es cada vez menor hasta llegar a igualarse las velocidades en todos los puntos de la coordenada transversal. Matemáticamente se visualiza este efecto por la constancia del “ímpetu total”, que se va a definir en el siguiente subapartado. Respecto a las velocidades transversales,  $V(X)$ , resultan positivas cerca del centro del chorro y negativas cerca de las coordenadas finales de  $Y$ . Consistentemente con la evolución de las velocidades longitudinales expuesta y aplicando la ecuación de continuidad se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial X} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial Y} > 0 \quad (2-118)$$

cerca del centro del chorro y

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial X} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial Y} < 0 \quad (2-119)$$

en el borde del chorro, llegando a volverse negativas las velocidades transversales e introduciéndose las partículas fluidas exteriores en el chorro. Esto provoca que el caudal aumente con la dirección longitudinal.

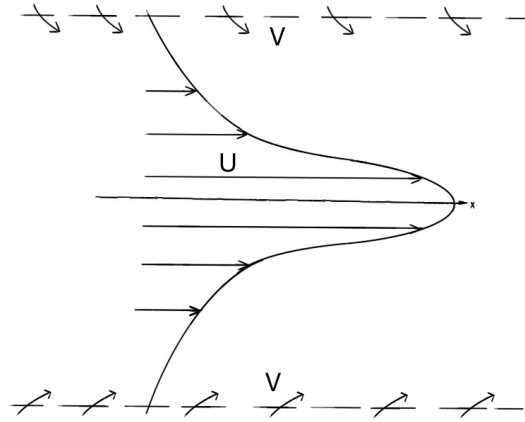


Figura 2-10. Velocidades transversales negativas aumentando el caudal con  $X$ .

Se va a estudiar ahora el efecto que provoca la variación de  $\lambda$  en la velocidad máxima del chorro con respecto de  $x$ ,  $U_0(x)$ , y en la anchura del chorro con respecto de  $x$ ,  $\delta(x)$ . Esta anchura se define como la coordenada  $y(x)$  en la cual la velocidad del chorro es la mitad de su velocidad máxima,  $u_0(x)$  (aunque la definición se da en coordenadas físicas, los resultados se van a mostrar de forma adimensional). En este caso, se van a mostrar los resultados para  $\lambda = 0.8, \lambda = 0.5, \lambda = 0.1, \lambda = 0.05$  y  $\lambda = 0.01$ . Como se ha comentado en el apartado anterior, los resultados empiezan a perder la consistencia cuando  $\lambda < 0.1$ . Para salvar este problema, se va a realizar una formulación alternativa en la cual se introduce una constante en el término convectivo de la ecuación de movimiento de modo que una velocidad longitudinal  $U$  nula no acarree problemas numéricos. De esta forma, se tiene:

$$(U + C - C) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2-120)$$

$$(U + C) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + C \frac{\partial U}{\partial X}$$

El nuevo término que aparece en el miembro derecho  $C \frac{\partial U}{\partial X}$  se va a formular esta vez en “diferencias finitas hacia atrás”, evitando así introducir nuevas incógnitas en el problema. La ecuación de movimiento quedaría formulada en diferencias finitas de la siguiente manera:

$$(U_{j,k} + C) \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta X} + V_{j,k} \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j+1,k-1}}{2\Delta Y} \quad (2-121)$$

$$= \frac{U_{j+1,k+1} - 2U_{j+1,k} + U_{j+1,k-1}}{\Delta Y^2} + C \frac{U_{j,k} - U_{j-1,k}}{\Delta X}$$

Se puede comprobar que los problemas numéricos se mitigan por completo introduciendo valores de  $C$  de orden unidad, aunque en estaciones muy cercanas a la boca del chorro el resultado se distorsiona con valores grandes de  $C$  debido a la formulación hacia atrás en diferencias finitas de la derivada parcial  $\frac{\partial U}{\partial X}$  en la primera estación. Por ello, solo se va a introducir un valor no nulo de  $C$  cuando sea necesario, es decir, para valores de  $\lambda \leq 0.1$ . En este caso, con utilizar el valor  $C = 1$  es suficiente. Por otro lado, conforme el chorro se va ensanchando es necesario hacer más grande la coordenada  $Y$ . Por ello, conforme se va disminuyendo  $\lambda$  se va a ir aumentando la coordenada final de  $Y$ ,  $Y_f$ . Consecuentemente, se van a aumentar también los puntos de la malla para mantener un valor pequeño de  $\Delta Y$ . Los resultados obtenidos son los siguientes:

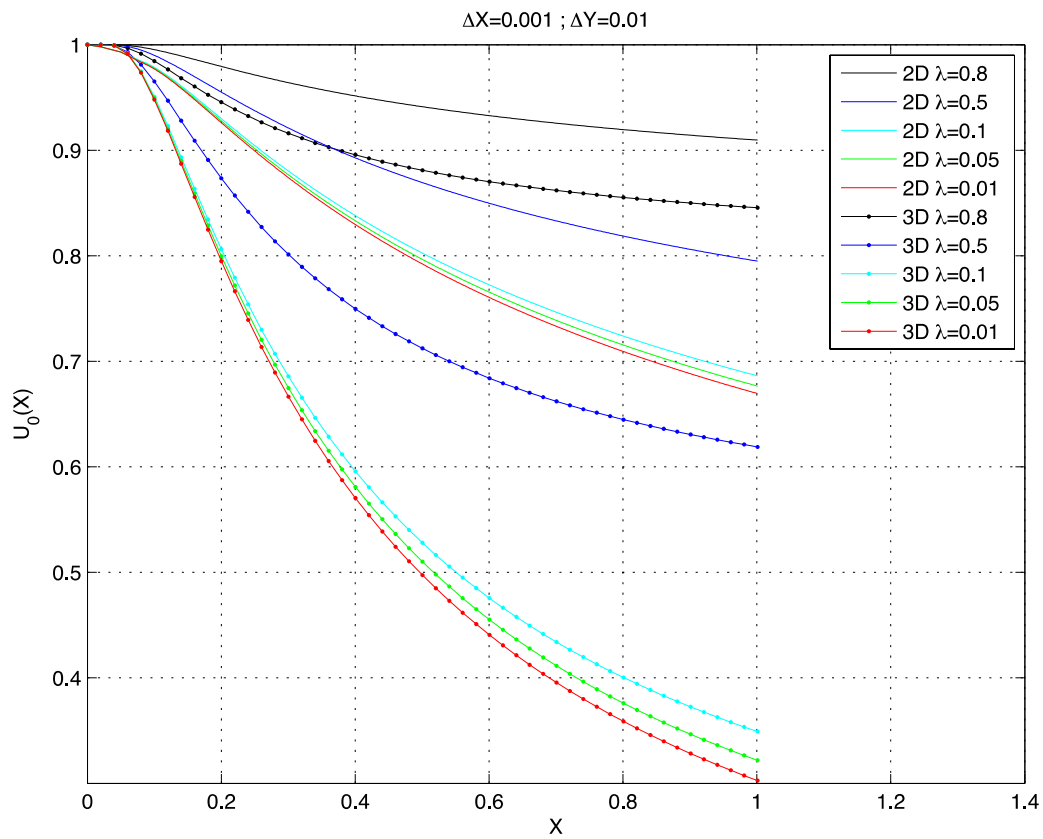


Figura 2-11. Gráficas de la velocidad máxima de cada estación para diferentes valores de  $\lambda$  comparando 2D y 3D.

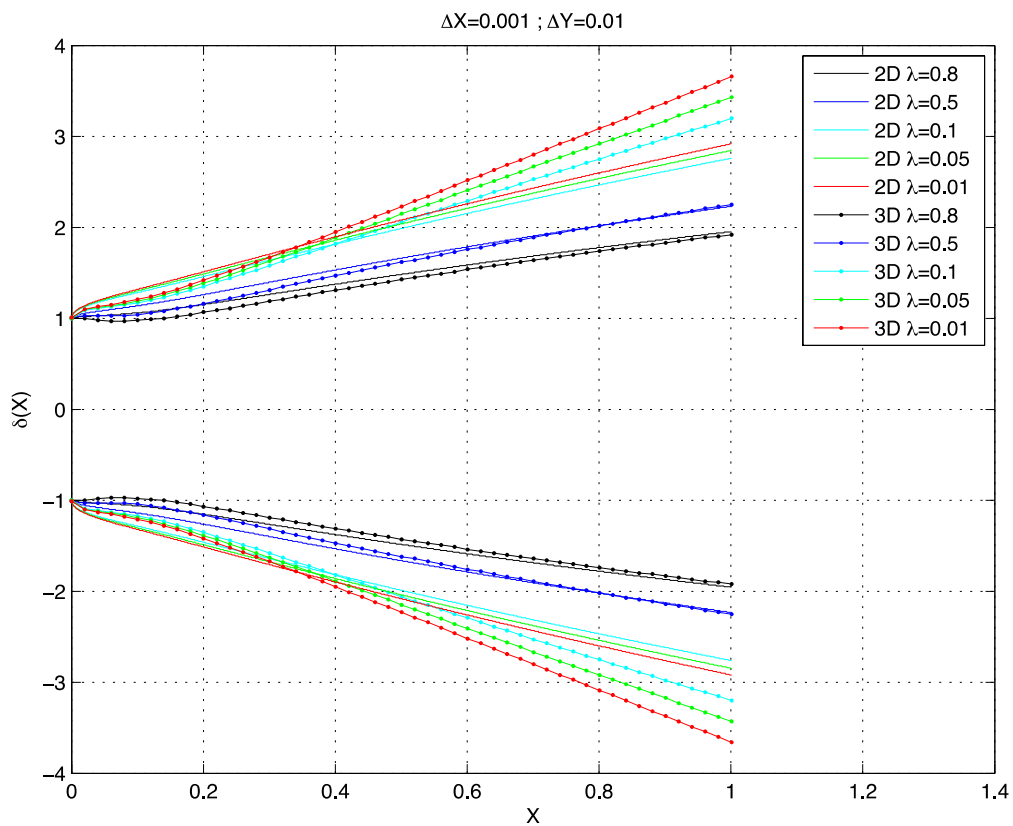


Figura 2-12. Gráficas de la anchura del chorro para diferentes valores de  $\lambda$  comparando 2D y 3D.

Como puede observarse en las figuras, el chorro se hace más ancho cuando disminuye  $\lambda$  y, por tanto,  $U_s$ . Esto tiene sentido ya que cuanto mayor es la diferencia entre el chorro principal y el flujo secundario, más se frena el chorro (esto se puede observar en las gráficas de la velocidad máxima) y, por tanto, se hace más ancho ya que el ímpetu total en la dirección longitudinal,  $J$ , es constante. Por otra parte, si se compara el chorro bidimensional con el axilsimétrico, se observa que la influencia de la disminución de  $\lambda$  es mayor en el caso axilsimétrico. El chorro se frena más rápidamente que en el caso plano y, por tanto, los efectos descritos anteriormente se acentúan.

### 2.4.2 Comparación teórico-numérica

Se va a tomar una referencia para comprobar la consistencia de los resultados. A partir de [2], se va a comparar la solución de semejanza obtenida por Schlichting de un chorro laminar que sale por una estrecha y larga rendija y se mezcla con el fluido ambiente en reposo. Según [2], para simplificar los cálculos se supone la rendija infinitamente estrecha. Entonces, para que el gasto y el ímpetu permanezcan finitos debemos suponer infinita la velocidad en la rendija. Vemos, por tanto, que el problema resuelto por Schlichting tiene algunas diferencias significativas con nuestro problema, por lo que se debe hacer la comparación de forma crítica teniendo estos aspectos presentes.

Por constancia de la presión, el ímpetu total en dirección X debe ser independiente de la distancia al orificio. Se puede escribir, por tanto,

$$J = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = cte \quad (2-122)$$

La integral (2-122) se va a resolver numéricamente mediante la regla de los trapecios, obteniéndose el ímpetu cinemático,  $K = J/\rho$ , constante necesaria en la solución obtenida por Schlichting.

Para el caso del chorro plano, los resultados de la solución de semejanza son:

$$\begin{aligned} u &= 0.4543 \left( \frac{K^2}{vx} \right)^{\frac{1}{3}} (1 - \tanh^2 \eta) \\ v &= 0.5503 \left( \frac{Kv}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} [2\eta(1 - \tanh^2 \eta) - \tanh \eta] \\ \eta &= 0.2753 \left( \frac{K}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{y}{x^{2/3}} \end{aligned} \quad (2-123)$$

La anchura teórica se obtiene a partir de  $u$ , de forma que

$$u(x) = \frac{1}{2} u_0(x) \quad ; \quad 0.4543 \left( \frac{K^2}{vx} \right)^{\frac{1}{3}} (1 - \tanh^2 \eta) = \frac{1}{2} 0.4543 \left( \frac{K^2}{vx} \right)^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \tanh^2 \eta = 0.5 \quad (2-124)$$

obteniéndose  $\eta = 0.881$ . Ahora, sustituyendo en (2-123), se obtiene

$$y_{0.5} = 3.20 \left( \frac{v^2}{K} \right)^{1/3} x^{2/3} \quad (2-125)$$

En el caso del chorro axilsimétrico, la solución obtenida difiere ligeramente:

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{K}{vz} \frac{1}{(1 + \eta^2)^2}$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3K}{\pi} \frac{\eta}{z} \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2}} \quad (2-126)$$

$$\eta = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3K}{\pi} \frac{1}{v} \frac{r}{z}}$$

Respecto a la anchura del chorro tridimensional, se puede comprobar que debe de cumplirse  $\eta = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

$$r_{0.5} = 8v \sqrt{(\sqrt{2} - 1) \frac{\pi}{3K} z} = 2.973v \sqrt{\frac{\pi}{K} z} \quad (2-127)$$

Para comparar el modelo numérico con los resultados teóricos, es necesario utilizar valores de  $\lambda$  lo más pequeños posible, ya que la solución de semejanza obtenida teóricamente corresponde a un chorro cuyo fluido circundante tiene velocidad nula. En el problema numérico que se resuelve en este trabajo, la situación se corresponde con  $u_s = 0$  y, por tanto,  $\lambda = 0$ . Como se ha comentado anteriormente, no es posible trabajar con valores nulos o muy pequeños de  $\lambda$ , por lo que se ha llegado a una solución de compromiso entre la consistencia del problema resuelto y la similitud con la solución de semejanza de Schlichting. Se va a comparar tanto la anchura del chorro,  $\delta(x)$ , como la relación  $\frac{u}{u_0}(\eta)$ . En este caso se van a utilizar las variables físicas para hacer la comparación ya que la solución de semejanza ha sido dada en variables físicas. Por ello, cobra importancia la anchura finita de la ranura del modelo numérico,  $a$  (dimensión característica en la dirección  $y$ ), en contraposición a la ranura infinitamente estrecha de la solución de semejanza.

La relación de velocidades de la solución de semejanza se puede escribir como

$$\frac{u}{u_0}(\eta) = (1 - \tanh^2 \eta) \quad (2-128)$$

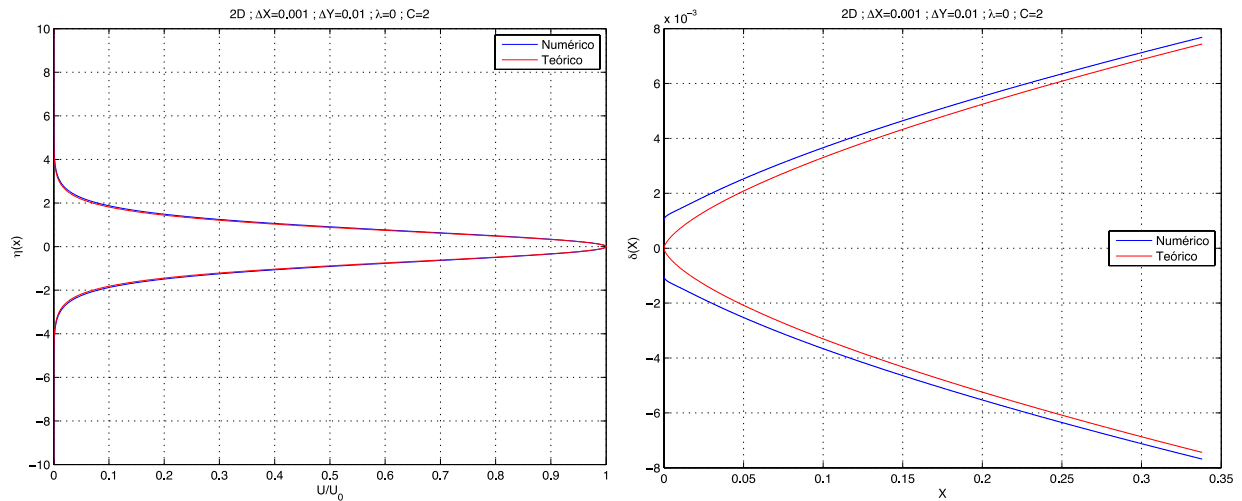
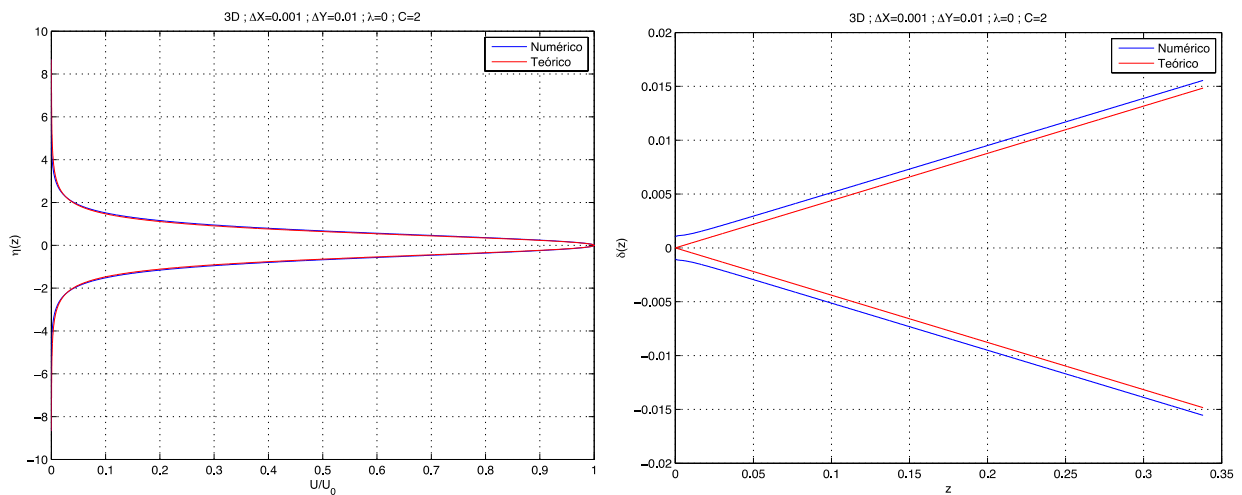
en el caso bidimensional y como

$$\frac{u}{u_0}(\eta) = \frac{1}{(1 + \eta^2)^2} \quad (2-129)$$

en el caso tridimensional.

Para comparar los resultados numéricos con la solución de semejanza se va a pintar solamente la última estación ( $X = 5$ ) por la claridad de la representación. Además, las soluciones de semejanza se acercan más a los valores reales cuando más nos alejamos del punto inicial. Comparándose los resultados numéricos con la solución de semejanza dada se obtiene, para  $\lambda = 0$  y  $a = 0.001 \text{ m}$ :



Figura 2-13. Comparación con Schlichting para  $\lambda = 0$  en 2D.Figura 2-14. Comparación con Schlichting para  $\lambda = 0$  en 3D.

Los resultados coinciden con la solución de semejanza de Schlichting. Como se ha comentado anteriormente, para hacer coincidir las soluciones es necesario hacer  $\lambda = 0$  o muy pequeño. Esto es posible gracias a la constante  $C$  que se ha introducido en la ecuación de cantidad de movimiento. Al realizar el cálculo aumentando la dirección transversal lo máximo posible, la condición de contorno en el infinito  $U(X, \infty)$  se asemeja cada vez más a la realidad física (ya que numéricamente no se puede llevar el cálculo hasta el infinito) y los efectos de inconsistencia terminan de mitigarse. Antiguamente, cuando no existían computadores tan potentes como hoy en día, no era posible realizar cálculos con mallas de tantos puntos. Para el caso de  $\lambda = 0$  se han utilizado 5000 puntos en la dirección longitudinal y 20000 puntos en la dirección transversal, valores inimaginables hace 50 años. El otro parámetro que cobra importancia en la comparación es la anchura del la ranura,  $a$ , la cual se supone nula en el cálculo teórico y, por ello, la anchura del chorro teórico parte desde el valor nulo. En la resolución numérica se ha optado, por tanto, por utilizar un valor pequeño de  $a$ . Finalmente, salvando la diferencia en la anchura inicial del chorro, tanto el chorro teórico como el numérico evolucionan de forma similar.

## 2.5 Resultados de penachos térmicos

Se van a presentar los resultados obtenidos para el campo de velocidades, de temperaturas y la anchura del penacho. Para ello, se van a hacer variar dos parámetros de entrada para estudiar la respuesta del modelo: la

potencia calorífica aportada en el centro del foco,  $Q$ , y la velocidad del campo fluido circundante  $U_\infty$ . La variación de este último parámetro es muy importante ya que puede marcar la diferencia en el comportamiento del fluido relativo a convección libre o a la convección forzada. Al igual que en los chorros incompresibles, se va a mostrar una parte del código del penacho bidimensional. En este caso, para una estación cualquiera  $X(j)$ .

**%Resolución de las velocidades**

**%Coeficientes de la matriz**

$\alpha(1:Ny) = -V(j,1:Ny)/2/Ay - 1/Ay^2$ ; **%Uso hipótesis  $V(0,Y)=0$**

$\beta(1:(Ny)) = U(j,2:Ny+1)/Ax + 2/Ay^2$ ;

$f_1(1:(Ny)) = U(j,2:Ny+1).^2/Ax + T(j,2:Ny+1)$ ;

$\omega(1:Ny) = V(j,1:Ny)/2/Ay - 1/Ay^2$ ;

$f_0 = U(j,1)^2/Ax + T(j,1)$ ;

$\beta_0 = U(j,1)/Ax + 2/Ay^2$ ;

**%columnas de la matriz**

$E = [[\alpha(1:Ny)'; 0] [\beta_0; \beta] [0; -2/Ay^2; \omega(1:Ny-1)']];$

$A = \text{spdiags}(E, [-1 \ 0 \ 1], Ny+1, Ny+1)$ ;

$b = [f_0; f_1(1:Ny-1)'; f_1(Ny) - \omega(Ny)*Ux]$ ;

**%Resolución con LU**

$x_1 = A \setminus b$ ; **% $x_1 = U(1,1:Ny)$**

$U(j+1,1:Ny+1) = x_1'$ ; **% $U(:,1)$  pertenece a la línea  $k=0$**

$V(j+1,1) = V_0 - Ay/Ax*(U(j+1,2) - U(j,2))$ ; **%velocidad vertical en la primera línea sobre el eje del chorro**

**for**  $k=1:Ny$

$V(j+1,k+1) = V(j+1,k) - Ay/Ax*(U(j+1,k+2) - U(j,k+2))$ ;

**end**

**%Resolución de las temperaturas**

**%Coeficientes de la matriz**

$\alpha_2(1:Ny) = -V(j+1,1:Ny)/2/Ay - 1/Ay^2/Pr$ ; **%Uso hipótesis  $V(0,Y)=0$**

$\beta_2(1:(Ny)) = U(j+1,2:Ny+1)/Ax + 2/Ay^2/Pr$ ;

$\omega_2(1:Ny) = V(j+1,1:Ny)/2/Ay - 1/Ay^2/Pr$ ;

$f_2(1:(Ny)) = U(j+1,2:Ny+1).*T(j,2:Ny+1)/Ax + 2/pi*\exp(-(Gr^{1/4})*(X(j+1)-X_0).^2+Y(1+(1:Ny)).^2/Gr^{1/4})); \beta_0 = U(j+1,1)/Ax + 2/Ay^2/Pr$ ;

$\omega_0 = -2/Ay^2/Pr$ ;

$f_0 = U(j+1,1).*T(j,1)/Ax + 2/pi*\exp(-(Gr^{1/4})*(X(j+1)-X_0).^2+Y(1).^2/Gr^{1/4}));$

**%columnas de la matriz**

$E_2 = [[\alpha_2'; 0] [\beta_0; \beta_2'] [0; \omega_0; \omega_2(1:Ny-1)']];$

```
A2=spdiags(E2,[-1 0 1],Ny+1,Ny+1);
b2=[fi20; fi2(1:Ny)];
```

```
%Resolución con LU
```

```
x2=A2\b2; %x2=T(:,1:Ny)
```

```
T(j+1,1:Ny+1)=x2(1:Ny+1); %T(:,1) pertenece a la línea k=0
```

En este caso, se muestra la resolución del campo de temperatura además del campo de velocidades ya que las ecuaciones de encuentran acopladas. Es remarcable la inclusión del foco de calor en los coeficientes de la matriz de las temperaturas.

## 2.5.1 Efecto de $Q$

La potencia calorífica aportada  $Q$  se relaciona con el número de  $Gr$  y con el radio del foco de calor  $L_F$  a través de la relación (2-38) como

$$Q = \frac{\rho C_p \nu^3}{g \beta L^3} Gr^{5/4} \quad ; \quad L = L_F Gr^{1/8}$$

De esta forma, fijando un valor del radio del foco, por ejemplo  $L_F = 0.01 \text{ m}$ , y el punto de colocación del foco de calor  $(x_F, y_F) = (0,0)$ , se puede estudiar el efecto de  $Q$  en el campo fluido. Por otro lado, se define el parámetro adimensional  $\lambda = U_\infty = \frac{u_\infty}{u_c}$ . Primero, se van a mostrar los perfiles típicos de velocidad longitudinal  $U(X, Y)$ , velocidad transversal  $V(X, Y)$  y temperatura  $T(X, Y)$  (todo en variables adimensionales) para  $Gr = 10^7$ , velocidad exterior  $\lambda = 0.1$  y temperatura exterior  $t_\infty = 300 \text{ K}$  hasta  $X = 1$ .

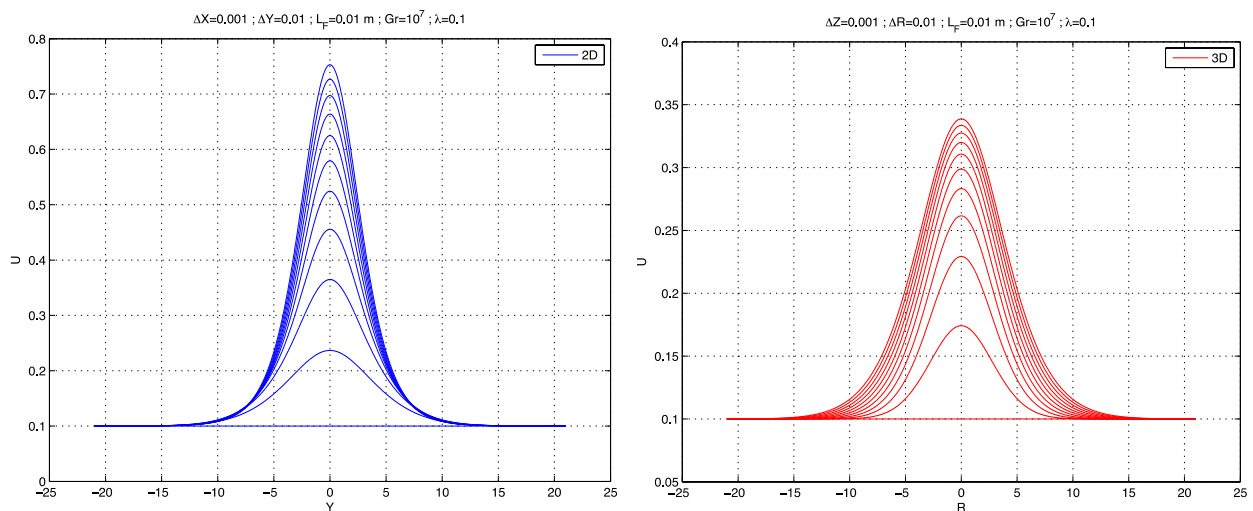


Figura 2-15. Perfiles de velocidades longitudinales típicos en penachos térmicos.

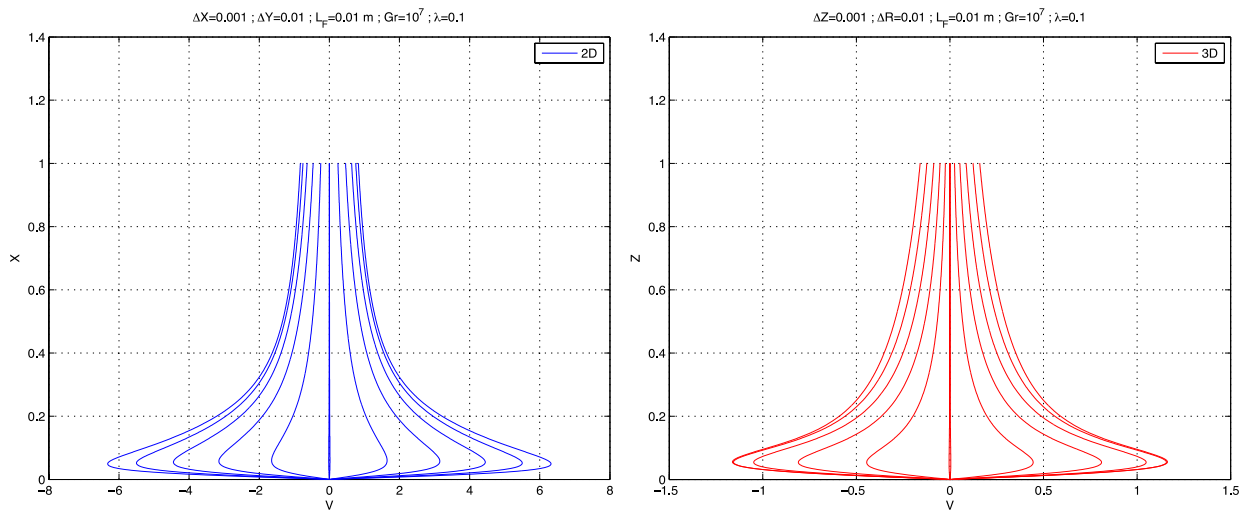


Figura 2-16. Perfiles de velocidades transversales típicos en penachos térmicos.

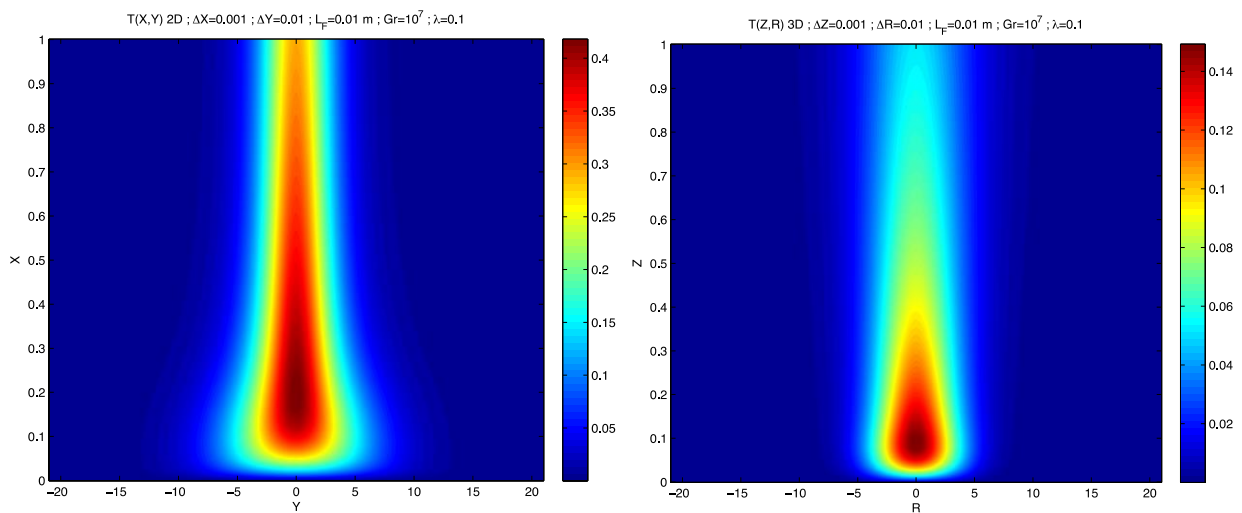


Figura 2-17. Campo de temperaturas típico en penachos térmicos.

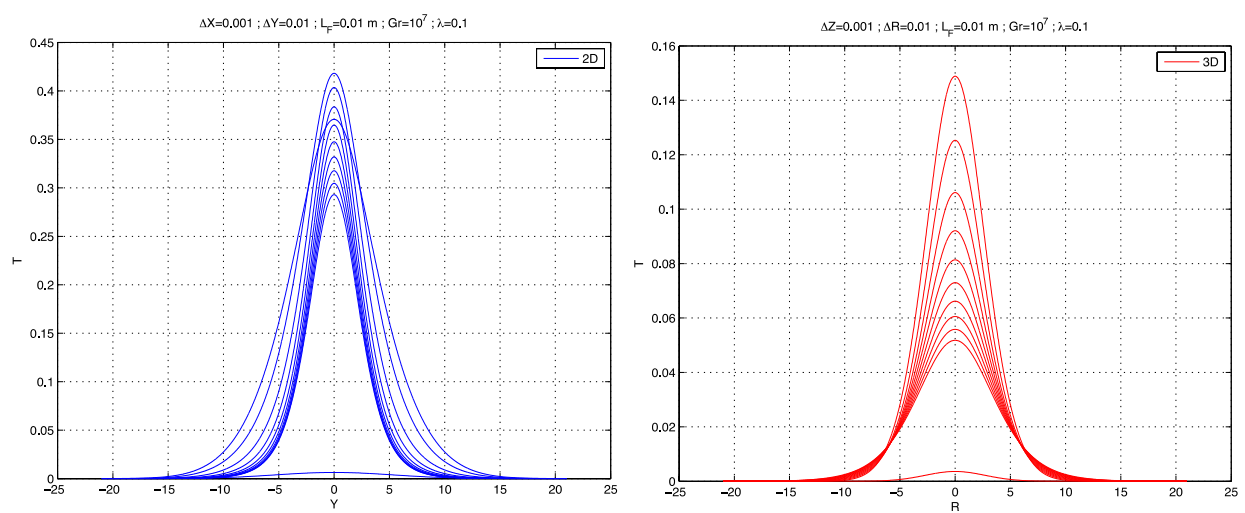


Figura 2-18. Perfiles de temperatura típicos en penachos térmicos

Al contrario que en el chorro incompresible en convención forzada, en el penacho térmico la velocidad va aumentando con la coordenada longitudinal. Esto se puede explicar gracias a las fuerzas de flotabilidad, fuerza continua sobre las partículas que las va acelerando. Las velocidades transversales, sin embargo, son apreciables en las inmediaciones del foco de calor y se van atenuando conforme se alejan las partículas de él. Respecto al campo de temperaturas, se encuentra la variación máxima en el foco de calor. Dicha diferencia de temperaturas es convectada aguas abajo aunque se va atenuando con la coordenada longitudinal. Con respecto a la coordenada transversal, los perfiles de temperatura  $T(Y)$  se parecen mucho a los de velocidad: experimentan un pico en todas las estaciones de  $X$  en el centro del penacho ya que el calor es convectado aguas abajo en la dirección longitudinal y se suavizan con la coordenada transversal.

Se va a estudiar ahora la evolución de tres parámetros del problema: anchura del penacho  $\delta(X)$  (definida del mismo modo que en los chorros incompresibles), temperatura máxima  $T_0(X)$  en el centro del penacho y velocidad máxima  $U_0(X)$  en el centro del penacho. Se van a mostrar los resultados correspondientes a  $Gr = 10^5$ ,  $Gr = 10^6$ ,  $Gr = 10^7$ ,  $Gr = 10^8$  y  $Gr = 10^9$  para una velocidad exterior  $\lambda = 0.1$  y una temperatura exterior  $t_\infty = 300\text{ K}$ .

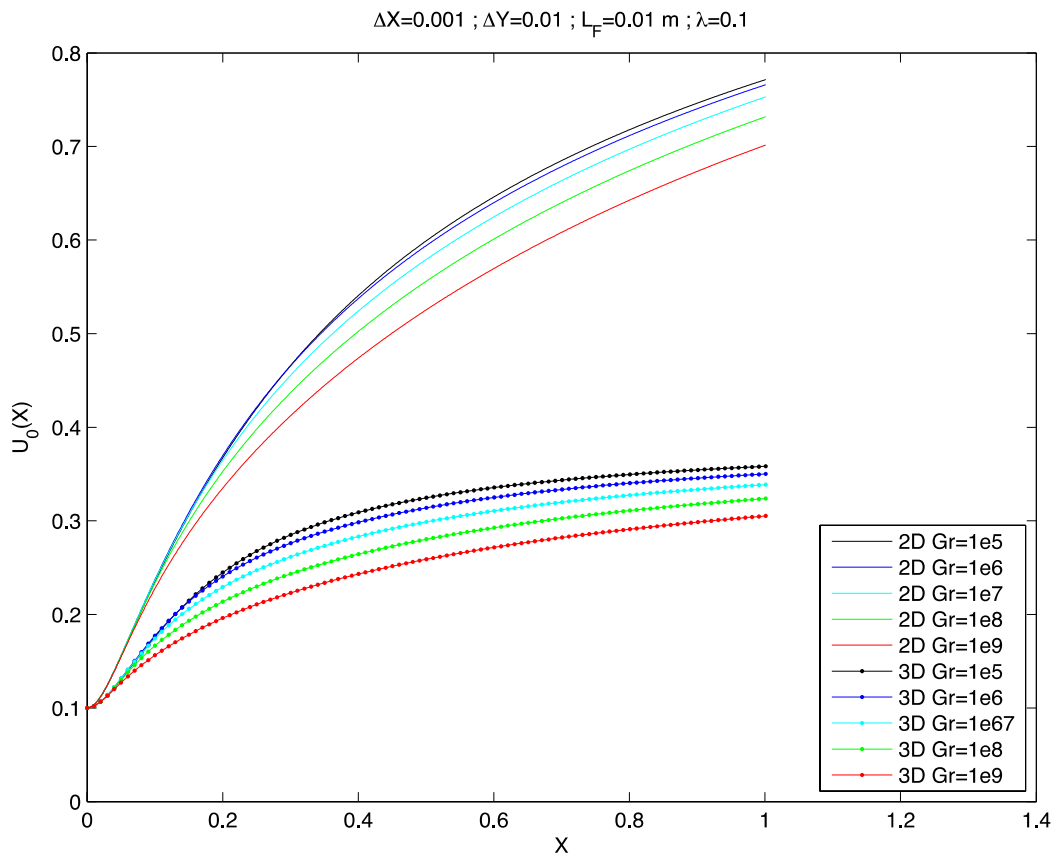


Figura 2-19. Gráfica de la velocidad longitudinal máxima en el centro del penacho para varios valores de  $Gr$  comparando 2D y 3D

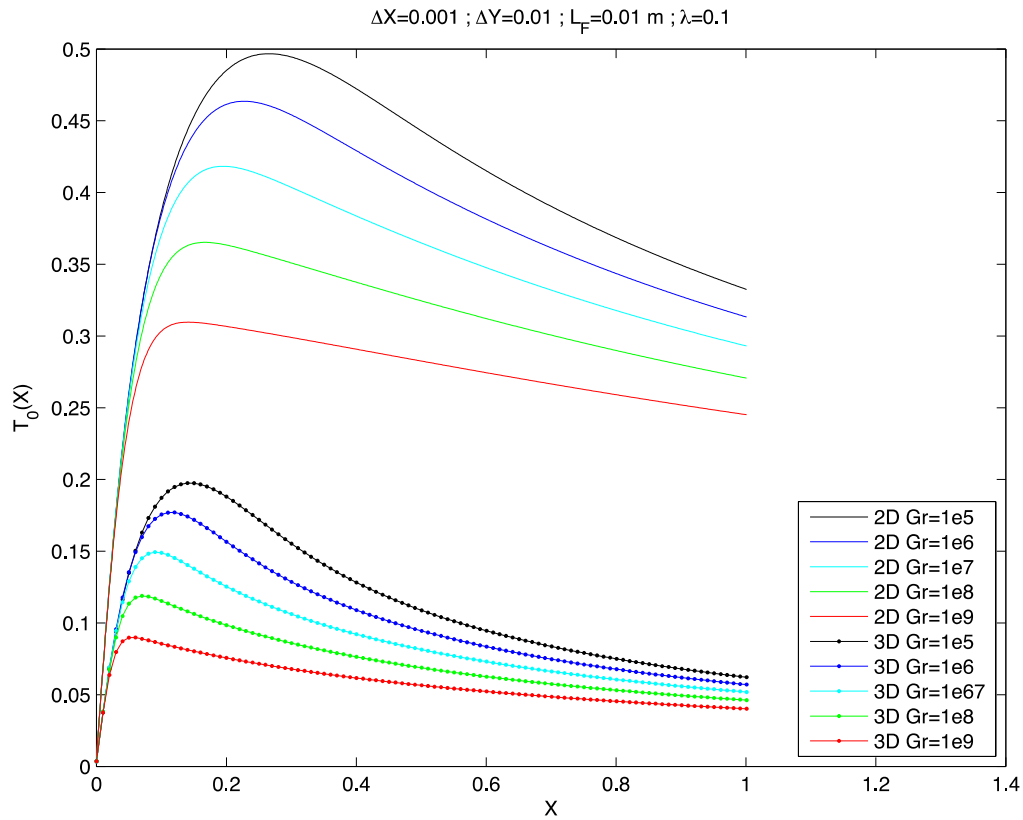


Figura 2-20- Gráfica de la temperatura máxima en el centro del penacho para varios valores de  $Gr$  comparando 2D y 3D

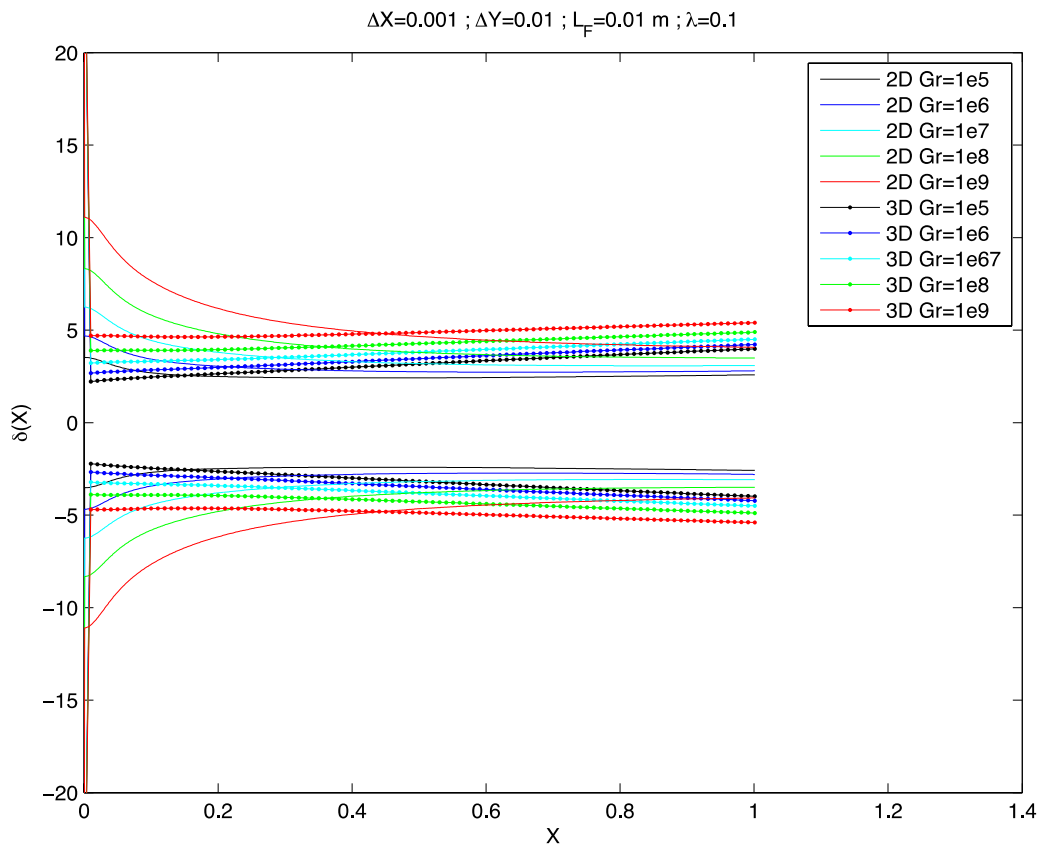


Figura 2-21. Gráfica de la anchura del penacho para varios valores de  $Gr$  comparando 2D y 3D

La velocidad longitudinal máxima aumenta en cada estación longitudinal. Como se ha dicho anteriormente, esto ocurre debido a que las fuerzas de flotabilidad aceleran las partículas. Esto se puede comprobar comparando los casos 2D y 3D. En el penacho axilsimétrico, la velocidad aumenta más lentamente que en el caso plano para todos los valores de  $Gr$  debido a que las fuerzas de viscosidad actúan más acusadamente sobre el axilsimétrico. Recordemos que en el chorro incompresible las velocidades longitudinales se frenan con más rapidez en el caso tridimensional debido a que se trata de un flujo con área de paso finita, al contrario que el chorro plano. Las temperaturas en el centro del penacho experimentan un máximo cerca del origen en todos los casos debido a la cercanía del foco de calor. Todas las curvas caen casi linealmente aguas abajo, debiendo llegar a  $T(X,Y) = \frac{t(x,y)-t_\infty}{t_c-t_\infty} = 0$  en el infinito. Al igual que en el caso de las velocidades, el foco de calor afecta más a los modelos bidimensionales. Respecto a la anchura del penacho se puede decir que es prácticamente constante en todos los casos ya que, aunque aumenta la velocidad máxima con la coordenada longitudinal, también cae con más rapidez hacia el borde del chorro por lo que la anchura no varía a penas debido a cómo se define.

### 2.5.2 Efecto de $U_\infty$

En este caso se va a mantener constante la potencia calorífica aportada con  $Gr = 10^7$ . Se va a mostrar la evolución de los mismos parámetros mostrados en el apartado anterior: anchura del penacho  $\delta(X)$ , temperatura máxima  $T_0(X)$  en el centro del penacho y velocidad máxima  $U_0(X)$  en el centro del penacho; pero, esta vez, se va a estudiar el efecto provocado en los resultados al variar la velocidad exterior. Se van a mostrar los resultados para  $\lambda = 0.01, \lambda = 0.05, \lambda = 0.1, \lambda = 1$  y  $\lambda = 5$ . Como se ha comentado anteriormente, la imposición de una velocidad exterior grande puede marcar la diferencia entre la convección libre y la convección forzada.

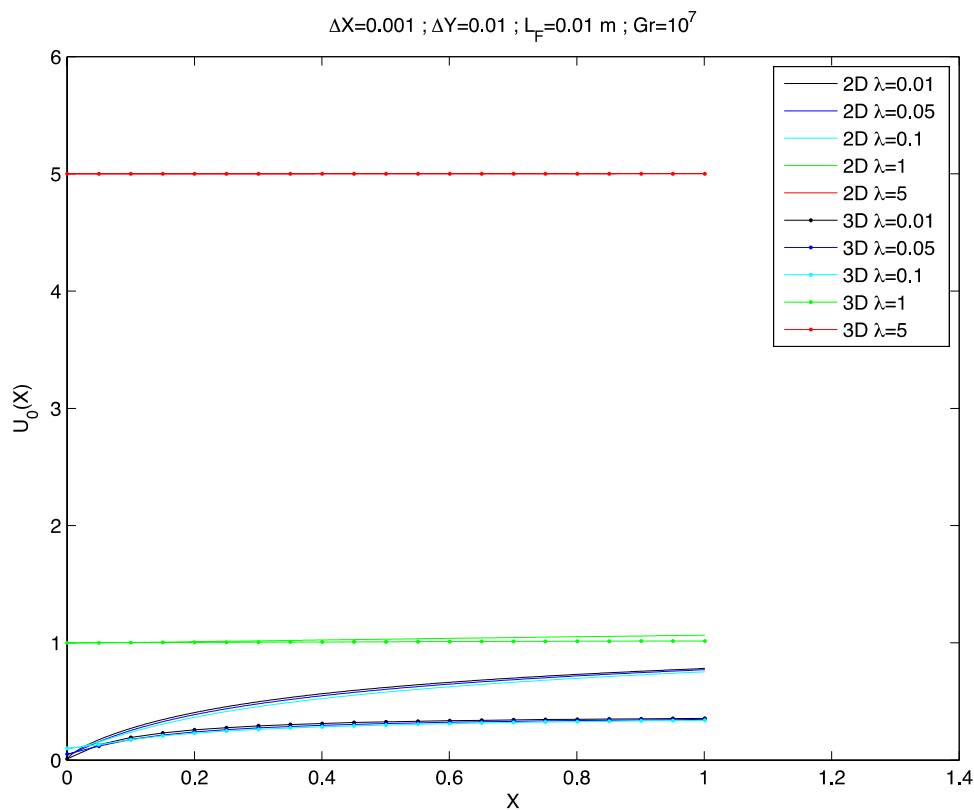


Figura 2-22. Gráfica de la velocidad longitudinal máxima en el centro del penacho para varios valores de  $U_\infty$  comparando 2D y 3D

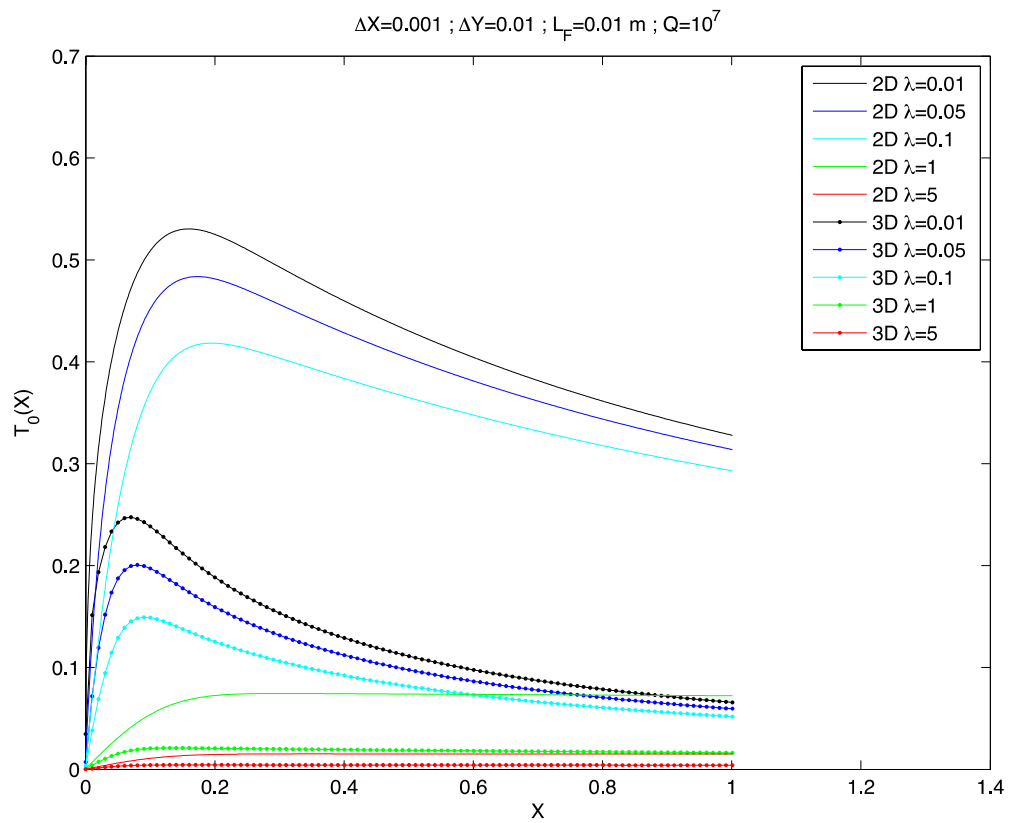


Figura 2-23. Gráfica de la temperatura máxima en el centro del penacho para varios valores de  $U_\infty$  comparando 2D y 3D

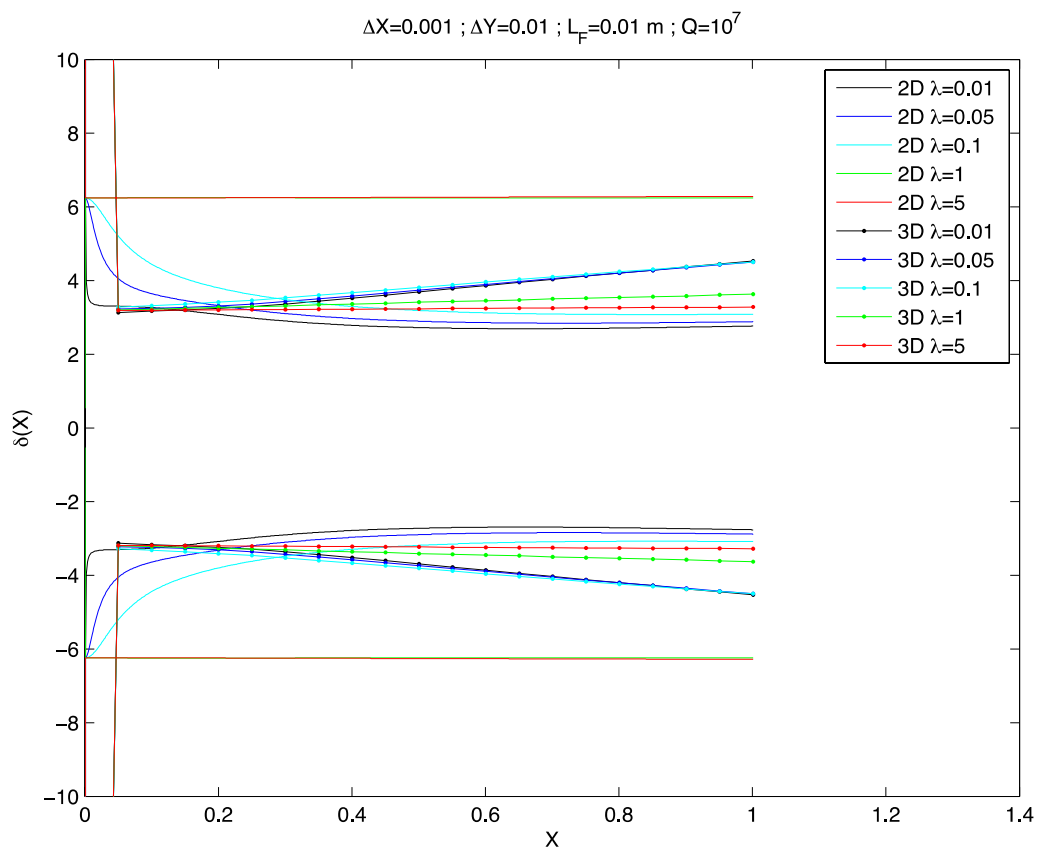


Figura 2-24. Gráfica de la anchura del penacho para varios valores de  $U_\infty$  comparando 2D y 3D



Resulta de gran interés el efecto que provoca la variación de la velocidad circundante  $U_\infty$  ya que, en la literatura, el problema solo se encuentra partiendo de una velocidad nula. Dependiendo de si la velocidad exterior  $\lambda$  es mayor o menor que 1, el sistema se comporta de una forma o de otra. Para los casos de  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 5$ , el sistema a penas se ve afectado por el foco de calor tanto en el penacho plano como en el axilsimétrico. La temperatura se ve aumentada levemente en las inmediaciones del foco de calor y luego es convectada aguas abajo por el fluido pero, por lo demás, no se aprecian variaciones importantes ni de las velocidades ni de la anchura del penacho. Por otro lado, en los casos en los que  $\lambda$  es menor que 1 el sistema experimenta los mismos cambios que en el apartado anterior. Por último, se va a presentar una comparativa de los perfiles de temperatura  $T(Y)$  para varias estaciones de  $X$  y para los mismos valores de  $\lambda$  mostrados anteriormente. Se va a mostrar tanto el modelo bidimensional como el axilsimétrico.

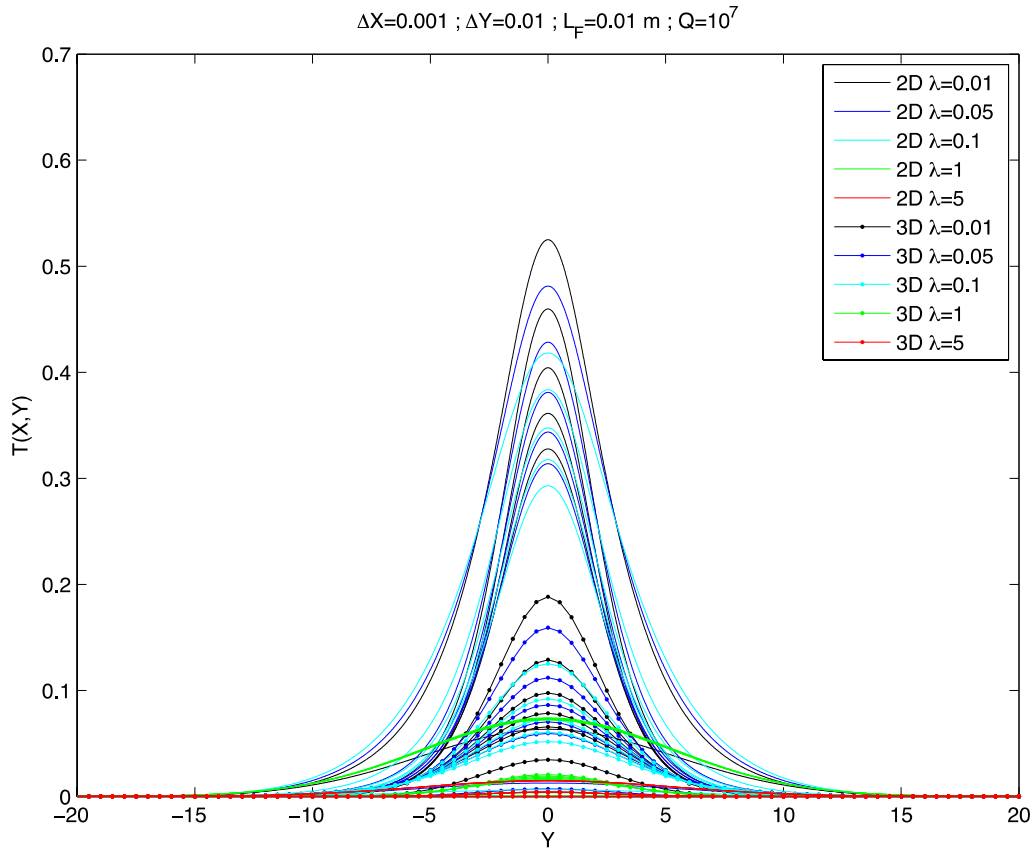


Figura 2-25. Comparación de perfiles de temperatura para diferentes  $U_\infty$ .

### 2.5.3 Comparación teórico-numérica

Se va a comparar el modelo numérico implementado con la solución de semejanza dada por [10] para penachos térmicos axilsimétricos laminares. De forma genérica, se llega a la solución de semejanza a través de las mismas ecuaciones que se han utilizado en este trabajo para realizar la integración numérica. La solución de semejanza viene dada para varios números de Prandtl, con lo que es interesante realizar la comparación para varios valores de  $Pr = \frac{\mu C_p}{K} = \frac{\nu}{\alpha}$ , donde  $\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$  es la difusividad térmica. Además, hay que tener en cuenta que el problema teórico parte de un fluido circundante con velocidad  $U_\infty = 0$ . Con esto, las funciones dadas por la solución de semejanza en [10] son

$$\eta = (Gr)^{1/4} \frac{r}{z}$$

$$\frac{f'}{\eta} = \frac{uz}{\nu Gr^{1/2}} \quad (2-130)$$

$$\theta(\eta) = \frac{t - t_\infty}{\nu^2 Gr} g\beta z^3$$

$$\delta(z) = \frac{z}{Gr^{1/4}}$$

donde  $Gr = \frac{g\beta Q_z}{2\pi\rho\nu^3 c_p} z^2$ ,  $Q_z$  es el flujo de potencia calorífica que atraviesa un plano transversal al movimiento longitudinal y  $\delta(z)$  es la anchura del penacho definida del mismo modo que en los chorros.  $Q_z$  se calcula numéricamente mediante la regla de los trapecios como

$$Q_z = 2\pi\rho c_p \int_0^\infty (t - t_\infty) u r dr \quad (2-131)$$

Para  $L_F = 0.005 \text{ m}$ ,  $Q = 10^6 \text{ W/m}^3$  y  $u_\infty = 0.001 \text{ m/s}$  se puede representar la función de  $Q_z(z)$  para diferentes números de Prandtl obteniendo:

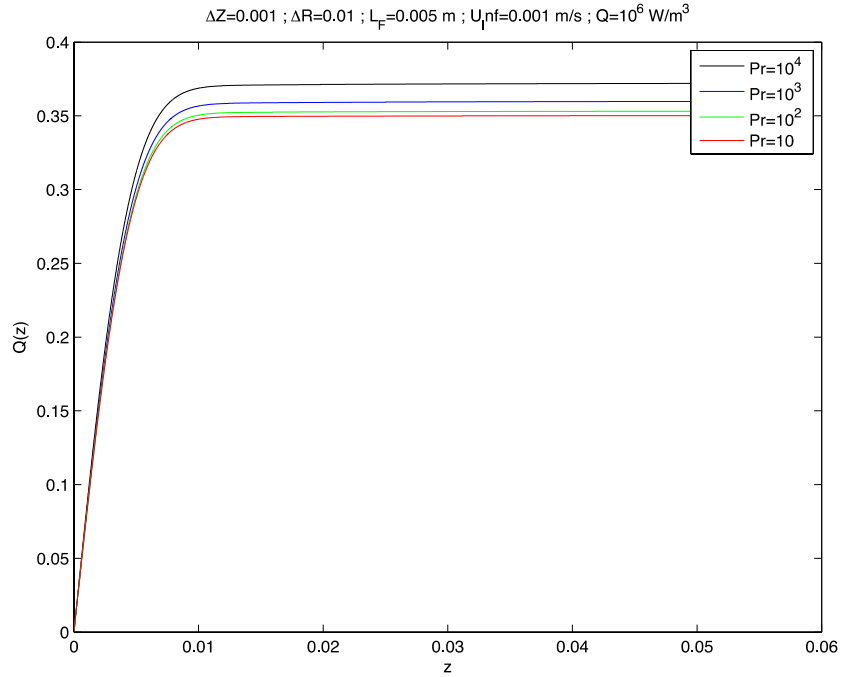


Figura 2-26. Evolución de la potencia calorífica transferida en cada plano  $z = cte$ .

Para realizar la comparación hay que tener en cuenta, como se ha dicho previamente, que el modelo numérico parte de una velocidad del fluido circundante  $u_\infty$  y la solución de semejanza parte de un fluido en reposo. No es posible realizar el cálculo numérico con velocidades  $u_\infty$  muy pequeñas puesto que aparecen problemas de inestabilidad numérica. Por ello, se ha optado por llegar a una solución de compromiso que permite una comparación consistente y estable. Con estos datos de entrada, la funciones de comparación se muestran a continuación para diferentes números de Prandtl.

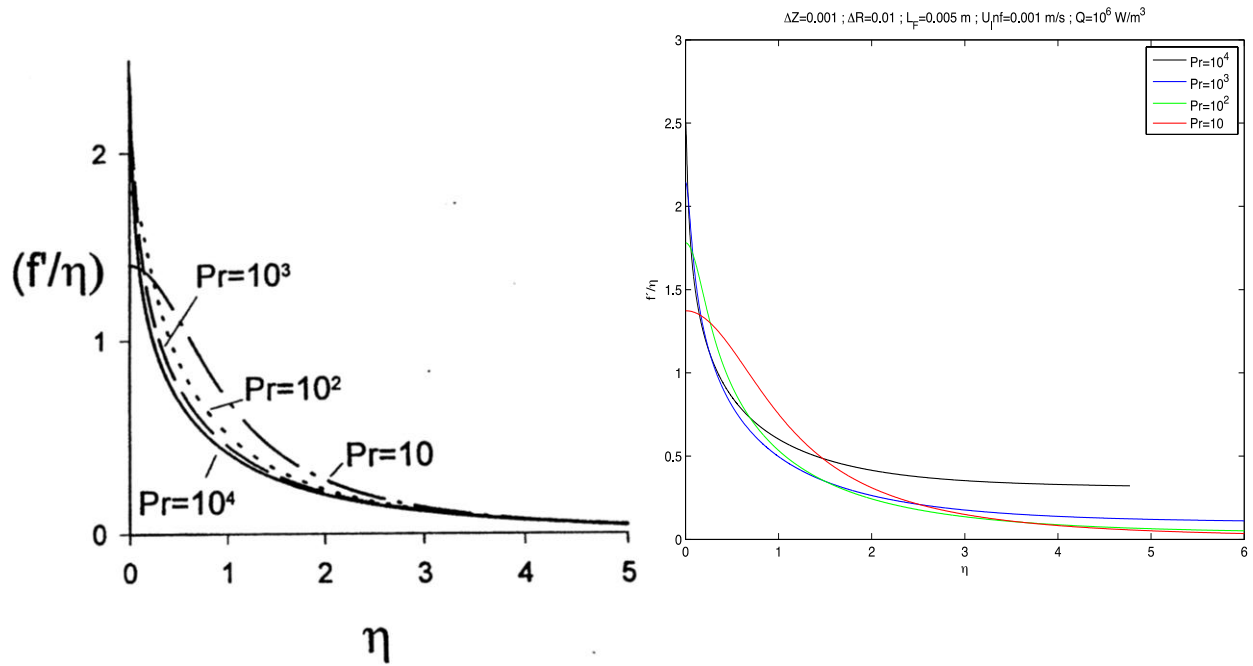


Figura 2-27. Comparación numérico-teórica de la función  $\frac{f'}{\eta}(\eta)$  para varios números de Pr

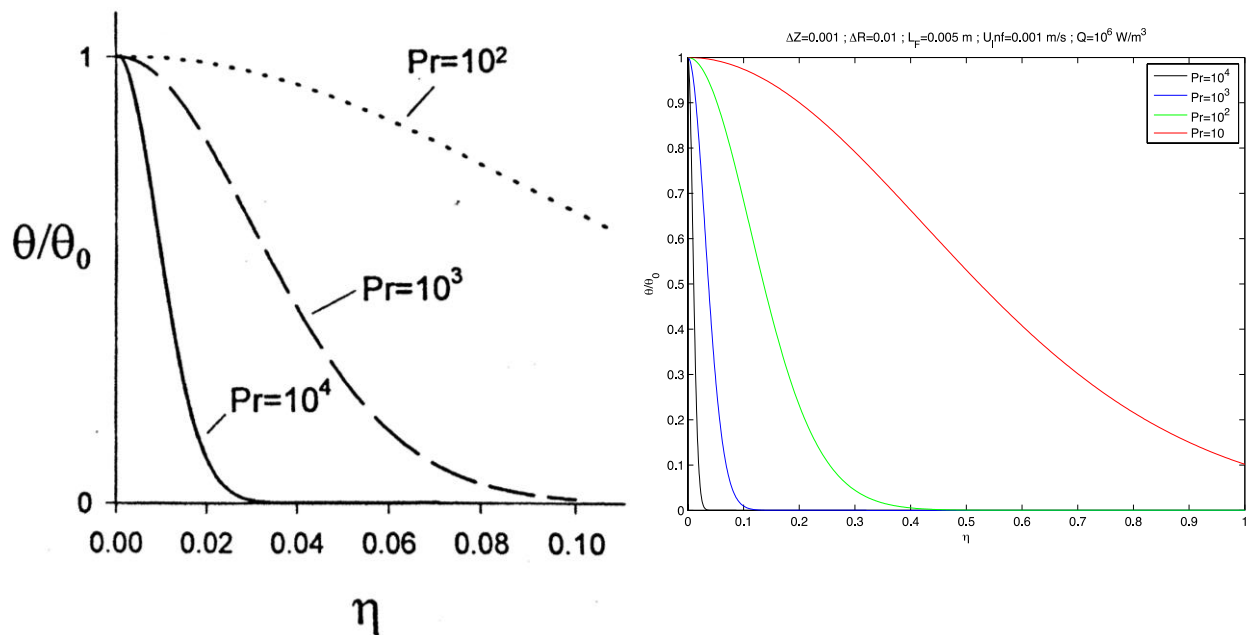


Figura 2-28. Comparación numérico-teórica de la función  $\frac{\theta}{\theta_0}(\eta)$  para varios números de Pr

Como puede observarse, la comparación es satisfactoria para la mayoría de los valores de  $\eta$  y de Pr. Solamente se encuentran diferencias apreciables para  $Pr = 10^4$  con valores grandes de  $\eta$ . Se trata de una combinación de valores de  $\eta$  y Pr para los cuales la velocidad exterior no puede hacerse demasiado pequeña, por ello el modelo numérico se aleja en esta zona de la solución de semejanza. Por lo demás, se deduce que el modelo es válido puesto que la similitud con la solución de semejanza es notable.



### 3 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

---

La implementación de forma consistente y eficiente de modelos numéricos que reproducen los fenómenos que ocurren en la naturaleza es uno de los mayores logros de la ingeniería. Se trata de una forma de resolver, de forma sencilla y sin complicadas deducciones matemáticas, complicados sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como son las ecuaciones de Navier-Stokes. En este trabajo se ha demostrado que es posible reproducir de forma consistente y eficiente, mediante métodos numéricos sencillos, los resultados que ofrecen las soluciones de las ecuaciones de chorros y penachos térmicos.

Es importante remarcar la sencillez de los métodos numéricos utilizados. Se trata de un trabajo orientado, como se ha dicho en la introducción, a la interacción del alumno con la física de los fluidos en el mundo académico a través de la programación de códigos como los que se han utilizado en este trabajo. No puede tratarse, por tanto, de complicadas herramientas matemáticas o un complejo lenguaje de programación, ya que en ese caso no sería posible vislumbrar la relación existente entre el código numérico y la física que se intenta modelar. No tendría sentido, por tanto, la programación propia de códigos numéricos cuando existen en el mercado completas herramientas de cálculo CFD con una sencilla interfaz que no requiere conocimientos previos de programación. A pesar de la sencillez de estos métodos, se han implementado modelos sólidos y sin pérdida de generalidad a través de las simplificaciones e hipótesis expuestas a lo largo del trabajo. En el caso de los chorros incompresibles se ha conseguido reproducir con una gran exactitud la solución de semejanza dada por Schlichting en [2], reproduciendo la distribución de velocidades longitudinales con errores despreciables y la anchura del chorro con la diferencia de la anchura de la boca del chorro. Por el contrario, en el caso de los penachos térmicos la comparación con la solución de semejanza de [10] no es tan exacta como en los chorros. La causa se debe a que, en el modelo numérico de los penachos laminares, no se puede implementar la variante del código introduciendo la formulación (2-121) ya que se produce una inestabilidad numérica. Por tanto, al utilizar un valor de compromiso de  $U_\infty$  la comparación pierde exactitud. Aun así, se trata de una comparación consistente y con errores aceptables.

Por otro lado, respecto a la motivación de la realización de este trabajo, puede decirse que la aplicación de chorros para el soplado y la succión de la capa límite en perfiles aerodinámicos podría ser una extensión natural de este trabajo. Partiendo de los métodos sencillos utilizados en este trabajo, es posible seguir completando los modelos y adaptándolos a geometrías más complejas como el extradós y en intradós de un perfil aerodinámico o la inclusión de elementos como los flaps y los slats en los modelos. Otro elemento necesario para completar y extender este trabajo es la implementación de forma general de los modelos en régimen turbulento de los problemas resueltos en este trabajo. Se trata de una importante tarea ya que en la naturaleza, en la mayoría de las circunstancias, los chorros y los penachos térmicos se encuentran en régimen turbulento. Queda claro, por tanto, que esta pequeña parte de la mecánica de fluidos tiene suficiente complejidad como para continuar trabajando en la misma línea mejorando los códigos y ampliando el rango de problemas y de situaciones que abarca cada variante resuelta.



## REFERENCIAS

---

- [1] Robert W. Hornbeck, Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer, Washington: NASA, 1973
- [2] H. Schlichting y K. Gersten, Boundary Layer Theory, Berlin: Springer, 2000
- [3] A. Barrero Ripoll y M. Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, Fundamentos y aplicaciones de la Mecánica de Fluidos, Madrid: McGraw-Hill, 2005.
- [4] The Japan Society of Mechanical Engineers, Visualized Flow: Fluid motion in basic and engineering situations revealed by flow visualization, Pergamon, 1988
- [5] [www.blog.cafefoundation.org](http://www.blog.cafefoundation.org)
- [6] Alexis Lefebvre y GeCheng Zha, Design of High Wing Loading Compact Electric Airplane Utilizing Co-Flow Jet Flow Control, University of Miami, 2015
- [7] [www.petervis.com](http://www.petervis.com)
- [8] [www.aerospace.illinois.edu](http://www.aerospace.illinois.edu)
- [9] GeCheng Zha y Bertrand P. E. Dano, Discrete co-flow jet (DCFJ) airfoil, US Patent US8485476 B2, (2013)
- [10] P. A. Vázquez, A. T. Pérez y A. Castellanos, Phys. Fluids Vol. 8, 1996





